Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 137.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35. Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1910.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 137.

	Seite
Fejér, L., Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter *Fourier*reihe . . .	1— 5
Frobenius, G., Über den *Fermat*schen Satz	314—316
Jung, H. W. E., Über den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschließt	310—313
Meder, A., Analytische Untersuchung singulärer Punkte von Raumkurven .	83—144
Neuendorff, R., Zur Theorie der Kreispunktpolarkurven	145—165
Perron, O., Über die *Poincaré*sche lineare Differenzengleichung	6— 64
Steinitz, E., Algebraische Theorie der Körper	167—309
Weitzenböck, R., Zum System eines linearen Komplexes und einer Fläche 2. Ordnung	65— 82

206259

Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter *Fourier*reihe.

Von Herrn *Leopold Fejér* in Klausenburg.

Bekanntlich hat *P. du Bois-Reymond* zuerst die Existenz einer überall stetigen Funktion erwiesen, deren *Fourier*sche Reihe an einer Stelle divergiert.

Herr *H. A. Schwarz* gab dann ein einfacheres Beispiel.

In neuerer Zeit haben die Herren *H. Lebesgue**) und *A. Haar***) je ein allgemeines Konstruktionsprinzip gefunden, nach welchem man beliebig viele stetige Funktionen mit der verlangten Eigenschaft aufstellen kann.

Durch das Studium dieser Konstruktionsprinzipe angeregt, habe ich ein äußerst einfaches Beispiel einer stetigen Funktion mit der verlangten Eigenschaft gefunden.

Die Reihe

$$(1.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n^3}x)}{n^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

---

*) *H. Lebesgue:* Leçons sur les séries trigonométriques, 1906, pag. 84—88.

**) *A. Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Dissert. Göttingen 1909. Die Konstruktion des Herrn *Lebesgue* (a. a. O. Art. 45, 46) ist für die *Fourier*sche Reihe bestimmt; die des Herrn *Haar* ist auf eine große Klasse von Orthogonalreihen (zu welcher auch die *Fourier*sche Reihe gehört) anwendbar.

ist eine, auf das Intervall $(0, \pi)$ *bezügliche Fouriersche Sinusreihe; die durch sie dargestellte, für* $0 \leqq x \leqq \pi$ *stetige Funktion hat für dasselbe Intervall* $(0, \pi)$ *eine Fouriersche Kosinusreihe, die an der Stelle* $x = 0$ *divergent ist.*

Da der Nachweis der Divergenz auch sehr einfach ist, könnte das Beispiel (1.) auch für Vorlesungszwecke geeignet sein.

Um den Beweis vorzuführen, schicke ich eine elementare Bemerkung voraus.

Es sei ν eine positive ganze Zahl. Dann ist bekanntlich, für $0 \leqq x \leqq \pi$,

$$(2.) \qquad \sin (2\nu+1)\frac{x}{2} = a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_\varkappa \cos \varkappa x + \cdots,$$

wo

$$(3.) \qquad \begin{cases} a_\varkappa = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\nu + \frac{1}{2}}{(\nu+\frac{1}{2})^2 - \varkappa^2}, & (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots) \\ a_0 = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{\nu + \frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Die Formeln (3.) lassen erkennen, daß die Zahlen

$$a_0, a_1, \ldots, a_\nu$$

alle positiv sind, während die Zahlen

$$a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \cdots$$

alle negativ sind. Wenn ich aber in die Gleichung (2.) $x = 0$ setze, so erhalte ich

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots = 0.$$

Setze ich also

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_\varkappa = s_\varkappa$$

($s_\varkappa$ ist die $\varkappa$-te Partialsumme der *Fourier*schen Kosinusreihe von $\sin(2\nu+1)\frac{x}{2}$ an der Stelle $x=0$), so kann ich folgendes behaupten:

1. *Die Partialsummen*

$$s_0, s_1, \ldots s_\varkappa, \ldots$$

sind alle positiv.

2. Sie wachsen im Anfange beständig, *erreichen in der Partialsumme s_ν ihr Maximum*, nehmen weiter beständig ab, und konvergieren mit unendlich wachsendem Index gegen Null.

Ich will nur noch eine untere Grenze für diese maximale Partialsumme s_ν aufstellen.

$$s_\nu = a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu > a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\nu+\frac{1}{2})^2-\varkappa^2} > \frac{2}{\pi}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\nu+1)^2-\varkappa^2} > \frac{2}{\pi}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\nu}\frac{dx}{(\nu+1)^2-x^2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2(\nu+1)}\log(2\nu+1) > \frac{1}{2\pi}\log(2\nu+1).$$

Ich habe also erhalten, daß die maximale Partialsumme s_ν größer ist als

$$\frac{1}{2\pi}\log(2\nu+1).$$

Nachdem ich diese elementare Bemerkung vorausgeschickt habe, will ich zunächst beweisen, daß *die unendliche Reihe*

$$(4.) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^{n^3}+1)\frac{x}{2}}{n^2}, \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ überall stetige Funktion darstellt, deren Fouriersche Kosinusreihe (in bezug auf das Intervall $(0, \pi)$) an der Stelle $x=0$ divergiert.

Es ist klar, daß die Reihe (4.) im Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ gleichmäßig (und absolut) konvergiert. Da die Reihenglieder überall stetig sind, ist daher auch die Funktion $\varphi(x)$ für $0 \leqq x \leqq \pi$ stetig. (Übrigens ist $\varphi(0)=0$.)

Ich behaupte nun, wie gesagt, daß die *Fourier*sche Kosinusreihe der stetigen Funktion $\varphi(x)$ (für das Intervall $(0, \pi)$) an der Stelle $x = 0$ divergiert.

Ich bilde jene Partialsumme dieser Kosinusreihe (immer an der Stelle $x=0$), deren Index 2^{n^3-1} ist. Da die Reihe (4.) im Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ gleichmäßig konvergent ist, kann ich bei der Bildung einer Partialsumme für $\varphi(x)$ in der Reihe (4.) *gliedweise* vorgehen.

Nach meiner Bemerkung liefern nun für die Stelle $x=0$ *sämtliche* Glieder der Reihe (4.) einen *positiven* Beitrag. Da weiter das Glied

$$\frac{\sin (2^{n^3}+1)\frac{x}{2}}{n^2}$$

für die fragliche Partialsumme von $\varphi(x)$ einen Beitrag liefert, der größer ist als

$$\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{2\pi}\log (2^{n^3}+1),$$

und also größer ist als $\frac{n}{16}$, so ist der Gesamtbetrag (d. h. der Wert der Partialsumme von $\varphi(x)$ mit dem Index 2^{n^3-1} an der Stelle $x=0$) gewiß größer als $\frac{n}{16}$.

Da n beliebig groß sein kann, habe ich die Divergenz der *Fourier*schen Kosinusreihe der überall stetigen (durch (4.) definierten) Funktion $\varphi(x)$ für $x=0$ erwiesen.

Beachtenswert ist, daß $\varphi(0)=0$ ist, und daß sämtliche Partialsummen der *Fourier*schen Kosinusreihe von $\varphi(x)$ an der Stelle $x=0$ *positiv* sind. Unter diesen befinden sich, wie ich eben gezeigt habe, beliebig große; aber auch beliebig kleine müssen vorkommen, da doch im entgegengesetzten Falle ihre arithmetischen Mittel nicht gegen $\varphi(0)=0$ konvergieren könnten. Die Tatsache, daß unter diesen Partialsummen beliebig kleine vorkommen, kann ich direkt verifizieren. Dies soll in einer späteren Veröffentlichung geschehen.

Ich will jetzt nur noch aus dem (etwas modifizierten) Beispiele (4.) das Beispiel (1.) ableiten.

Es ist klar, daß auch die Kosinusreihe der Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\,(2^{n^3+1}+1)\frac{x}{2}}{n^2}, \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

an der Stelle $x = 0$ divergiert.

Nun ist aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n^3+1}+1)\frac{x}{2}}{n^2} = \sin\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^{n^3}x}{n^2} + \cos\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^3}x}{n^2}. \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

Die Kosinusreihe des ersten Teiles (auf der rechten Seite) konvergiert für $x = 0$. (Dieser Teil ist sogar differenzierbar an der Stelle $x = 0$.) Der zweite Teil läßt sich zerlegen:

$$\cos\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^3}x}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^3}x}{n^2} + \left(\cos\frac{x}{2} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^3}x}{n^2}. \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

Der zweite Teil auf der rechten Seite dieser Gleichung hat eine Kosinusreihe, die an der Stelle $x = 0$ konvergent ist.

Daher divergiert die Fouriersche Kosinusreihe der für $0 \leqq x \leqq \pi$ *stetigen Funktion*

(1.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\,(2^{n^3}x)}{n^2}, \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

an der Stelle $x = 0$.

Die Beispiele (1.) und (4.) (unendlich viele ähnliche lassen sich leicht bauen) sind, wie ich glaube, nicht nur durch ihre Einfachheit beachtenswert, sondern auch dadurch, daß man an ihnen die Divergenzerscheinung ihrer *Fourier*reihe im Detail verfolgen kann.

Dies und andere Bemerkungen, werde ich in einer späteren Veröffentlichung ausführen.

Über die *Poincaré*sche lineare Differenzengleichung.

Von Herrn *Oskar Perron* in München.

---

§ 1.

Einleitung. Die Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten.

Die Integrale der linearen Differenzengleichung r-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$D_{\nu+r} + a_1 D_{\nu+r-1} + a_2 D_{\nu+r-2} + \cdots + a_r D_\nu = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

deren letzter $a_r \neq 0$ angenommen werden darf, hängen ab von der algebraischen Gleichung

$$x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \cdots + a_r = 0.$$

Sind deren Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$ alle voneinander verschieden, so hat das allgemeine Integral bekanntlich die Form

$$D_\nu = C_1 \varrho_1^\nu + C_2 \varrho_2^\nu + \cdots + C_r \varrho_r^\nu,$$

wo die C_i willkürliche Konstanten sind. Macht man weiter die Annahme, daß auch die absoluten Beträge der Wurzeln alle voneinander verschieden sind, so daß man

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| > \cdots > |\varrho_r| > 0$$

setzen kann, dann sieht man leicht, daß für jedes Integral (abgesehen von dem trivialen $D_\nu = 0$) der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$$

existieren und gleich einer Wurzel ϱ_i sein muß. Denn wenn etwa C_j die erste von Null verschiedene unter den Zahlen $C_1, C_2, \dots C_r$ ist, so wird dieser Grenzwert offenbar gleich ϱ_j.

Finden sich dagegen unter den absoluten Beträgen $|\varrho_i|$ mehrere gleiche, so existiert der Grenzwert nicht mehr für jedes Integral. Denn ist etwa $|\varrho_1| = |\varrho_2|$, so ist gewiß das Integral $D_\nu = C_1 \varrho_1^\nu + C_2 \varrho_2^\nu$ ein solches, für das der Grenzwert nicht existiert, es sei denn, daß $C_1 = 0$ oder $C_2 = 0$ ist.

Wenden wir uns jetzt zu dem Fall, daß auch mehrfache Wurzeln vorhanden sind, so seien etwa $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_m$ die voneinander verschiedenen Wurzeln, und es sei allgemein ϱ_i eine e_i-fache Wurzel, so daß

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_m = r$$

ist. Dann hat bekanntlich das allgemeine Integral die Form:

$$D_\nu = \sum_{i=1}^{m} (C_{1i} \nu^{e_i-1} + C_{2i} \nu^{e_i-2} + \cdots + C_{e_i i}) \varrho_i^\nu .$$

Wenn nun wieder die voneinander verschiedenen Wurzeln auch verschiedene absolute Beträge haben, so daß man

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| > \cdots > |\varrho_m|$$

setzen kann, dann wird wiederum für jedes Integral der obige Grenzwert existieren und einer der Wurzeln ϱ_i gleich sein. Denn ist j der kleinste Index, für welchen nicht alle Koeffizienten

$$C_{1j}, C_{2j}, \dots C_{e_j j}$$

verschwinden, so wird offenbar

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = \varrho_j .$$

Finden sich dagegen unter den voneinander verschiedenen Wurzeln solche von gleichem absolutem Betrag, so wird dieser Grenzwert wieder nicht mehr für jedes Integral existieren.

Somit ergibt sich, daß der obige Grenzwert allemal dann, und für *jedes* Integral auch nur dann existiert, wenn die voneinander verschiedenen Wurzeln auch lauter verschiedene absolute Beträge haben, die Gleichung mag im übrigen mehrfache Wurzeln besitzen oder nicht.

Im allgemeinsten Fall, wenn wir auch verschiedene Wurzeln von gleichem absolutem Betrag zulassen, gibt es immer für jede Wurzel ϱ_i wenigstens *gewisse Partikulärintegrale*, für welche der Grenzwert existiert und gleich ϱ_i ist. Denn ist ϱ_i etwa eine e-fache Wurzel, so wird mindestens für die e Integrale

$$\varrho_i^\nu, \quad \nu\varrho_i^\nu, \quad \nu^2\varrho_i^\nu, \quad \ldots \quad \nu^{e-1}\varrho_i^\nu$$

der fragliche Grenzwert gleich ϱ_i. Das allgemeine Integral läßt sich überdies linear aus lauter Partikulärintegralen dieser speziellen Art zusammensetzen, wie die oben gegebene Darstellung zeigt.

§ 2.

Abweichendes Verhalten der Integrale bei variabeln Koeffizienten.

Wir wenden uns jetzt zur Differenzengleichung mit variabeln Koeffizienten:

$$(1.) \qquad D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

von denen wir aber voraussetzen, daß sie mit wachsendem ν gegen die Grenzwerte

$$(2.) \qquad \lim_{\nu=\infty} a_1^{(\nu)} = a_1, \quad \lim_{\nu=\infty} a_2^{(\nu)} = a_2, \quad \ldots \quad \lim_{\nu=\infty} a_r^{(\nu)} = a_r$$

konvergieren. Da diese zuerst von Herrn *Poincaré* untersuchte Differenzengleichung für $\lim \nu = \infty$ in die des vorigen Paragraphen übergeht, so wird

man vermuten, daß auch ihre Integrale für $\lim \nu = \infty$ ein ähnliches Verhalten zeigen. Und in der Tat hat Herr *Poincaré* gefunden, daß auch für jedes Integral von (1.) der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$$

existiert und einer Wurzel der algebraischen Gleichung

$$x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \cdots + a_r = 0 \tag{3.}$$

gleich ist, sofern nur die voneinander verschiedenen Wurzeln auch lauter verschiedene absolute Beträge haben*). Wir nennen (3.) die *charakteristische Gleichung.* Ich habe kürzlich („Über einen Satz des Herrn *Poincaré*, Band 136 dieses Journals) den *Poincaré*schen Satz für den Fall von neuem bewiesen, daß die charakteristische Gleichung keine mehrfachen Wurzeln hat, und daran einige weitere Erörterungen geknüpft.

Was den Fall mehrfacher Wurzeln betrifft, so ist der von Herrn *Poincaré* dafür gegebene Beweis nicht ausreichend, und in der Tat will ich hier zunächst an einem Beispiel zeigen, daß der fragliche Satz für diesen Fall überhaupt nicht mehr richtig ist.

Betrachten wir zu dem Zweck die Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$D_{\nu+2} - 2 D_{\nu+1} + \left(1 + \frac{a}{\nu+1}\right) D_\nu = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.}$$

wo a eine positive Zahl $\geqq 1$ ist. Die charakteristische Gleichung lautet hier

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

und hat die Doppelwurzel $x = 1$. Wäre also der *Poincaré*sche Satz richtig, so müßte für jedes Integral

*) Selbstverständlich ausgenommen sind dabei solche Integrale, welche für alle genügend großen Werte von ν verschwinden.

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = 1$$

sein. Setzt man daher

$$\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = 1 + \frac{1}{\xi_\nu}, \tag{5.}$$

wodurch die Differenzengleichung (4.) übergeht in

$$\xi_{\nu+1} = \frac{1+\xi_\nu}{1-\frac{a\xi_\nu}{\nu+1}}, \tag{6.}$$

so hätte man nach Herrn *Poincaré* stets

$$\lim_{\nu=\infty} |\xi_\nu| = \infty. \tag{7.}$$

Übrigens ist nicht ausgeschlossen, daß auch für endliches ν einmal $\xi_\nu = \infty$ wird; das besagt nichts weiter als

$$\frac{1}{\xi_\nu} = 0, \text{ also } D_{\nu+1} = D_\nu,$$

und aus (6.) folgt dann

$$\xi_{\nu+1} = -\frac{\nu+1}{a}, \quad \xi_{\nu-1} = \frac{\nu}{a},$$

so daß jedenfalls nicht für zwei aufeinanderfolgende ν-Werte $\xi_{\nu_0} = \infty$ sein kann.

Um nun zu zeigen, daß die Beziehung (7.) in Wahrheit nicht besteht, gehen wir von irgendwelchen reellen Anfangswerten D_0, D_1 aus; dadurch ist ξ_0 gegeben, und aus (6.) können alle ξ_ν sukzessive berechnet werden. Es läßt sich dann zeigen, daß ξ_ν unendlich oft negativ und unendlich oft positiv wird. Dies leuchtet sofort ein, wenn für unbegrenzt viele ν-Werte $\xi_\nu = \infty$ ist; dann wird nämlich

$$\xi_{\nu+1}=-\frac{\nu+1}{a}<0, \qquad \xi_{\nu-1}=\frac{\nu}{a}>0.$$

Andernfalls schließt man folgendermaßen: Wäre etwa für $\nu \geqq N$ dauernd $\xi_\nu \geqq 0$, so würde aus (6.) folgen:

$$\xi_{\nu+1}=\frac{1+\xi_\nu}{1-\frac{a\xi_\nu}{\nu+1}} \geqq (1+\xi_\nu)\left(1+\frac{a\xi_\nu}{\nu+1}\right) \geqq 1+\xi_\nu+\frac{a\xi_\nu}{\nu+1} \geqq 1+\frac{\nu+2}{\nu+1}\xi_\nu.$$

Also wäre

$$\frac{\xi_{\nu+1}}{\nu+2} \geqq \frac{\xi_\nu}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2},$$

und da dies für $\nu=N,\ N+1,\ N+2,\ldots$ gilt, auch

$$\frac{\xi_{N+\lambda}}{N+\lambda+1} \geqq \frac{\xi_N}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+\cdots+\frac{1}{N+\lambda+1}.$$

Daher wird $\frac{\xi_{N+\lambda}}{N+\lambda+1}$ für genügend große λ beliebig groß, also sicher größer als $\frac{1}{a}$; aber dann erweist sich nach (6.) $\xi_{N+\lambda+1}$ entgegen unserer Annahme als negativ.

Allein ξ_ν kann für $\nu \geqq N$ auch nicht dauernd $\leqq 0$ sein; dann würde nämlich aus (6.) folgen:

$$|\xi_{\nu+1}|=\frac{|\xi_\nu|-1}{1+\frac{a|\xi_\nu|}{\nu+1}} \leqq |\xi_\nu|-1,$$

also auch

$$|\xi_{N+\lambda}| \leqq |\xi_N|-\lambda,$$

was aber für hinreichend große λ nicht möglich ist.

Da somit ξ_ν wirklich unendlich oft negativ und unendlich oft positiv wird, so muß es auch unbegrenzt viele ν-Werte geben, für welche gleichzeitig

$$\xi_\nu \leqq 0,\ \xi_{\nu+1} > 0 \text{ oder } = \infty$$

ist. Dann folgt aber aus (6.):

$$|\xi_{\nu+1}| = \frac{1-|\xi_\nu|}{1+\frac{a|\xi_\nu|}{\nu+1}} \leqq 1-|\xi_\nu|.$$

Es ist also $|\xi_{\nu+1}| \leqq 1$, und da dies für unendlich viele ν-Werte gilt, so besteht jedenfalls nicht die Beziehung $\lim |\xi_\nu| = \infty$, also auch nicht der *Poincaré*sche Satz. Zugleich zeigt dies Beispiel, daß es nicht nur einzelne Partikulärintegrale gibt, für welche der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$$

nicht existiert, sondern es gibt hier überhaupt kein Integral, für welches dieser Grenzwert vorhanden ist, wenigstens kein reelles Integral bei dieser reellen Differenzengleichung.

Auch der am Schluß des § 1 erwähnte Satz, daß es stets gewisse Partikulärintegrale gibt, für welche der obige Grenzwert existiert, und daß das allgemeine Integral sich aus solchen dieser speziellen Art linear zusammensetzt, gilt jetzt nicht mehr. Um dies zu zeigen, scheint allerdings unser Beispiel nicht auszureichen; denn es könnte dort immerhin ein *imaginäres* Partikulärintegral $D_\nu + i D'_\nu$ geben, für welches

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1} + i D'_{\nu+1}}{D_\nu + i D'_\nu} = 1$$

ist (wenigstens vermochte ich das Gegenteil nicht zu beweisen). Da dann die gleiche Beziehung auch für das konjugiert imaginäre Integral gilt, und beide offenbar linear unabhängig sind, so läßt sich das allgemeine Integral aus diesen zwei speziellen zusammensetzen.

Betrachten wir dagegen die Differenzengleichung

$$D_{\nu+2} - \left(1 + \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}\right) D_\nu = 0, \tag{8.}$$

deren charakteristische Gleichung

$$x^2-1=0$$

die Wurzeln $+1$ und -1 hat, welche also von gleichem absolutem Betrag sind*). Hier gibt es in der Tat kein Integral, für welches

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}=+1 \text{ oder } =-1$$

wäre. Denn es ist offenbar

$$D_{2\nu}=(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2\nu-1}\right)D_0,$$

$$D_{2\nu+1}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)D_1.$$

Wenn nun $D_0=0$ oder $D_1=0$ ist, so ist allgemein $D_{2\nu}=0$ bezw. $D_{2\nu+1}=0$, also der fragliche Grenzwert sinnlos. Ist aber $D_0\neq 0$, $D_1\neq 0$, dann folgt

$$\lim_{\nu=\infty}|D_{2\nu}|=\infty,\quad \lim_{\nu=\infty}D_{2\nu+1}=0,$$

so daß der Quotient $\left|\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}\right|$ zwischen Null und Unendlich oszilliert, also wiederum keinen Grenzwert hat.

Wir setzen jetzt wieder voraus, daß die voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung auch ungleiche absolute Beträge haben. Dann nähert sich zwar im allgemeinen, wie wir sahen, der Quotient $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ bei mehrfachen Wurzeln keiner bestimmten Grenze; aber er wird, wie jetzt gezeigt werden soll, *doch für unendlich viele ν-Werte einer Wurzel ϱ_i der charakteristischen Gleichung beliebig nahe kommen.* Mit anderen

---

*) Man beachte, daß ja der in Rede stehende Satz bei Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten auch dann gilt, wenn verschiedene Wurzeln von gleichem absolutem Betrag vorhanden sind.

Worten, es gibt eine unbegrenzte Folge von wachsenden Indizes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ derart, daß

$$\lim_{s=\infty} \frac{D_{\lambda_s+1}}{D_{\lambda_s}} = \varrho_i$$

ist. Bei der Differenzengleichung (4.) läßt dieser Satz sich leicht bestätigen. Denn da ξ_ν unendlich oft negativ und unendlich oft positiv wird, so kann man beliebig große ν-Werte angeben, für welche gleichzeitig

$$\xi_\nu > 0, \quad \xi_{\nu+1} \leqq 0 \text{ oder } = \infty$$

ist. Dann folgt aus (6.)

$$-|\xi_{\nu+1}| = \frac{1+|\xi_\nu|}{1-\frac{a|\xi_\nu|}{\nu+1}}.$$

Es kann daher der rechts stehende Nenner nicht positiv sein, also ist

$$\xi_\nu \geqq \frac{\nu+1}{a}.$$

Folglich nimmt ξ_ν unter andern auch beliebig große Werte an, und für solche liegt dann der Quotient

$$\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = 1 + \frac{1}{\xi_\nu}$$

beliebig nahe bei 1. W. z. b. w.

Um den Satz allgemein zu beweisen, ordnen wir jedem Index ν einen Index j_ν zu, der so gewählt ist, daß $D_{\nu+j_\nu}$ die absolut größte der Zahlen

$$D_\nu, D_{\nu+1}, \ldots D_{\nu+r-1}$$

ist, oder, wenn mehrere vom maximalen Absolutwert vorhanden sind, eine beliebige von diesen. Da j_ν stets eine der Zahlen $0, 1, \ldots r-1$ ist, so

müssen unendlich viele j_ν ein und denselben Wert j haben. Für diese ν-Werte sind dann die Zahlen

$$\frac{D_\nu}{D_{\nu+j}}, \frac{D_{\nu+1}}{D_{\nu+j}}, \cdots \frac{D_{\nu+r-1}}{D_{\nu+j}}$$

absolut höchstens gleich 1. Man kann also aus diesen ν-Werten noch eine unendliche Serie $\nu_1, \nu_2, \ldots$ auswählen, derart, daß die Grenzwerte

$$\lim_{s=\infty} \frac{D_{\nu_s}}{D_{\nu_s+j}} = \gamma_0, \quad \lim_{s=\infty} \frac{D_{\nu_s+1}}{D_{\nu_s+j}} = \gamma_1, \quad \cdots \quad \lim_{s=\infty} \frac{D_{\nu_s+r-1}}{D_{\nu_s+j}} = \gamma_{r-1}$$

existieren; dabei ist speziell $\gamma_j = 1$. Aus der Differenzengleichung (1.) selbst ergibt sich dann, daß auch der Grenzwert

$$\lim_{s=\infty} \frac{D_{\nu_s+r}}{D_{\nu_s+j}} = \gamma_r$$

existiert, und zwar ist

$$\gamma_r + a_1\gamma_{r-1} + a_2\gamma_{r-2} + \cdots + a_r\gamma_0 = 0.$$

Allgemeiner sieht man auch, daß für jedes μ der Grenzwert

$$\text{(9.)} \qquad \lim_{s=\infty} \frac{D_{\nu_s+\mu}}{D_{\nu_s+j}} = \gamma_\mu$$

vorhanden ist, und die γ_μ genügen dabei der Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\text{(10.)} \qquad \gamma_{\mu+r} + a_1\gamma_{\mu+r-1} + a_2\gamma_{\mu+r-2} + \cdots + a_r\gamma_\mu = 0.$$

Wenn nun die γ_μ nicht alle von einem gewissen Index μ ab verschwinden, so folgt hieraus nach § 1:

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{\gamma_{\mu+1}}{\gamma_\mu} = \varrho_i;$$

das besagt aber nach (9.):

$$\lim_{\mu=\infty}\lim_{s=\infty}\frac{D_{\nu_s+\mu+1}}{D_{\nu_s+\mu}}=\varrho_i.$$

Man kann daher μ und s auf unendlich viele Arten so wählen, daß der Quotient

$$\frac{D_{\nu_s+\mu+1}}{D_{\nu_s+\mu}}$$

sich beliebig wenig von ϱ_i unterscheidet, womit für diesen Fall unser Satz bewiesen ist.

Es bleibt noch der zweite Fall zu untersuchen, daß alle γ_μ von einem gewissen Index μ ab verschwinden. Da aber wegen $\gamma_j=1$ *nicht alle* γ verschwinden, so gibt es einen bestimmten Index μ, derart, daß

$$\gamma_\mu\neq 0,$$

$$\gamma_{\mu+1}=\gamma_{\mu+2}=\gamma_{\mu+3}=\cdots=0$$

ist. Dann erkennt man aus (10.), daß dieser Fall überhaupt nur eintreten kann, wenn $a_r=0$ ist, und aus (9.) ergibt sich:

$$\lim_{s=\infty}\frac{D_{\nu_s+\mu+1}}{D_{\nu_s+\mu}}=\frac{\gamma_{\mu+1}}{\gamma_\mu}=0.$$

Also unterscheidet sich der Quotient

$$\frac{D_{\nu_s+\mu+1}}{D_{\nu_s+\mu}}$$

für hinreichend große s beliebig wenig von Null, das heißt aber in unserm Fall, von einer Wurzel der charakteristischen Gleichung. Denn wegen $a_r=0$ ist ja $\varrho=0$ eine solche Wurzel, so daß hiermit unser Satz in allen Fällen bewiesen ist.

Übrigens ist keineswegs gesagt, daß für jedes Integral die Wurzel ϱ_i etwa eindeutig ist. Vielmehr kann es sehr wohl vorkommen, daß für eine andere Serie von ν-Werten der Quotient $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ gegen eine andere Wurzel ϱ_k konvergiert. Um hierfür ein Beispiel zu geben, gehen wir wieder aus von der Differenzengleichung (4.). Es sei D_ν irgendein reelles Partikulärintegral. Dann wird $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ für eine gewisse Auswahl von ν-Werten gegen 1 konvergieren. Andrerseits läßt sich zeigen, daß ξ_ν unendlich oft zwischen 1 und 3 liegt. Denn, wie bereits bewiesen (S. 12), ist jedenfalls für unendlich viele ν:

$$0 < \xi_\nu \leqq 1;$$

dann wird aber nach (6.)

$$1 < \xi_{\nu+1} < 3,$$

wenn nur $\nu+1 > 3a$ ist. Für diese ν-Werte ist daher

$$\frac{D_{\nu+2}}{D_{\nu+1}} = 1 + \frac{1}{\xi_{\nu+1}} \begin{cases} < 2 \\ > \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Es gibt also, wenn man $\nu-1$ an Stelle von ν schreibt, eine unbegrenzte Serie von ν-Werten, für welche $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ einem Grenzwert zustrebt, der zwischen $\frac{4}{3}$ und 2 liegt, also jedenfalls von 1 verschieden ist. Es sei ϱ dieser Grenzwert. Dann besitzt die Differenzengleichung dritter Ordnung

$$(11.)\quad D_{\nu+3} - (2+\varrho)\, D_{\nu+2} + \left(1 + \frac{a}{\nu+2} + 2\varrho\right) D_{\nu+1} - \varrho\left(1 + \frac{a}{\nu+1}\right) D_\nu = 0,$$

da sie sich auch in der Form

$$\left[D_{\nu+3} - 2\, D_{\nu+2} + \left(1 + \frac{a}{\nu+2}\right) D_{\nu+1}\right] - \varrho\left[D_{\nu+2} - 2\, D_{\nu+1} + \left(1 + \frac{a}{\nu+1}\right) D_\nu\right] = 0$$

schreiben läßt, ebenfalls das obige partikuläre Integral D_ν. Die charakteristische Gleichung lautet aber

$$x^3-(2+\varrho)x^2+(1+2\varrho)x-\varrho=0,$$

hat also die zwei voneinander verschiedenen Wurzeln $x=1$ und $x=\varrho$. Das oben studierte Partikulärintegral hat daher die Eigenschaft, daß der Quotient $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ für eine gewisse Serie von ν-Werten gegen die eine Wurzel 1, für eine andere Serie gegen die zweite Wurzel ϱ konvergiert.

§ 3.

Der Fundamentalsatz.

Wenn der letzte Koeffizient der Differenzengleichung (1.) verschwindet, so hat sie mindestens ein Integral, das, ohne identisch Null zu sein, doch für alle hinreichend großen Werte von ν verschwindet. Denn es sei $\nu=N$ ein solcher Index, daß $a_r^{(N)}=0$ ist. Dann kann man die Differenzengleichung dadurch befriedigen, daß man $D_\nu=0$ setzt für $\nu>N$, während die $N+1$ Anfangswerte $D_0, D_1, \dots D_N$ aus den N Gleichungen

$$D_{\nu+r}+a_1^{(\nu)}D_{\nu+r-1}+a_2^{(\nu)}D_{\nu+r-2}+\cdots+a_r^{(\nu)}D_\nu=0 \qquad (\nu=0,1,\dots N-1)$$

zu berechnen sind und nicht alle verschwinden.

Umgekehrt kann ein solches Ausnahmsintegral auch nur dann vorhanden sein, wenn wenigstens einmal $a_r^{(\nu)}=0$ ist. Denn ist etwa $D_N\neq 0$, aber $D_\nu=0$ für $\nu>N$, so folgt aus

$$D_{N+r}+a_1^{(N)}D_{N+r-1}+a_2^{(N)}D_{N+r-2}+\cdots+a_r^{(N)}D_N=0$$

notwendig $a_r^{(N)}=0$. Die Existenz solcher Ausnahmsintegrale bringt gewisse Unbequemlichkeiten mit sich, so daß wir bald zwei Fälle unterscheiden müssen, je nachdem $a_r^{(\nu)}$ für alle ν von Null verschieden ist oder nicht. Man beachte übrigens, daß bei den speziellen Beispielen des § 2 stets $a_r^{(\nu)}\neq 0$ war, so daß die dort konstatierten Anomalien nicht mit dem Vor-

handensein eines solchen Ausnahmsintegrales zusammenhängen, für welches ja selbstverständlich der Grenzwert von $\frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$ keinen Sinn hätte.

Die §§ 3—6 sind nun dem Beweis des folgenden wichtigen Satzes gewidmet, der in allen Fällen gilt, selbst dann, wenn die charakteristische Gleichung mehrere verschiedene Wurzeln vom gleichen absoluten Betrag hat. Einige Anwendungen werden in § 7 folgen.

Fundamentalsatz: Sind $q_1, q_2, \dots q_\sigma$ die voneinander verschiedenen absoluten Beträge der Wurzeln der charakteristischen Gleichung und ist allgemein e_λ die Anzahl der Wurzeln vom absoluten Betrag q_λ, wobei mehrfache Wurzeln auch ihrer Multiplizität entsprechend zu zählen sind, so daß

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_\sigma = r$$

ist: dann hat die Differenzengleichung, sofern ihr letzter Koeffizient $a_r^{(\nu)}$ für alle ν von Null verschieden ist, ein Fundamentalsystem von Integralen, die derart in σ Klassen zerfallen, daß allgemein für die Integrale der λ-ten Klasse und deren lineare Verbindungen die Beziehung

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} = q_\lambda$$

statthat. Die Anzahl der Integrale der λ-ten Klasse ist gleich e_λ.

Hieraus folgt leicht, daß für jedes Integral der obere Limes von $\sqrt[\nu]{|D_\nu|}$ einer der Zahlen q_λ gleich ist. Denn ordnet man die q_λ etwa in der Reihenfolge

$$q_1 > q_2 > \cdots > q_\sigma,$$

so wird für irgendein Integral D_ν

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} = q_\lambda$$

sein, wenn bei der linearen Zusammensetzung dieses Integrales aus den obigen r Fundamentalintegralen diejenigen der $\lambda-1$ ersten Klassen nicht vorkommen, d. h. den Koeffizienten Null haben, während aus der λ-ten

Klasse mindestens eines einen von Null verschiedenen Koeffizienten hat. Für das *allgemeine* Integral wird daher insbesondere der fragliche obere Limes den Wert q_1 haben. Für diejenigen Partikulärintegrale, die sich linear aus den Integralen der σ-ten Klasse zusammensetzen, aber auch nur für diese, hat er den kleinstmöglichen Wert q_σ. Diese Integrale sollen im Anschluß an Herrn *Pincherle „ausgezeichnete Integrale"* genannt werden; sie bilden eine e_σ-fache lineare Schar.

Man erkennt leicht, daß unser Satz ohne die Voraussetzung $a_r^{(\nu)} \neq 0$ nicht mehr gelten würde. Denn diejenigen Integrale, welche für alle hinreichend großen Werte ihres Index verschwinden, müßten offenbar in eine neue Klasse aufgenommen werden, so daß für die obigen σ Klassen entsprechend weniger Integrale übrig blieben. Immerhin bleibt, wie wir zeigen werden, noch folgender Satz bestehen:

Zusatz: Bei jedem Integral, welches für unendlichviele Werte seines Index von Null verschieden ist, ist der obere Limes

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|}$$

stets gleich dem absoluten Betrag einer Wurzel der charakteristischen Gleichung

Im Gegensatz zu der Aussage des Fundamentalsatzes können wir aber bei Zulässigkeit des Falles $a_r^{(\nu)} = 0$ nun nicht mehr behaupten, daß zu *jedem* der absoluten Beträge q_λ nun auch *wirklich* Integrale vorhanden sind, für welche

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} = q_\lambda$$

wäre. Es kann sogar vorkommen, daß alle Integrale von einem gewissen ν-Wert ab dauernd verschwinden.

Den Beweis des Fundamentalsatzes und seines Zusatzes gründen wir nun auf die folgenden drei Hilfssätze:

Hilfssatz I. Ist q irgendeine positive Zahl, die größer ist als der größte unter den absoluten Beträgen der Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so ist stets

$$|D_\nu| \leqq (|_0|D + |D_1| + \cdots + |D_{r-1}|) C q^\nu,$$

wo C eine Konstante bedeutet, die weder von ν, noch von den Anfangswerten $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ abhängt.

Nehmen wir dies einstweilen als bewiesen an, so folgt hieraus insbesondere auch

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{q^\nu} = 0. \tag{13.}$$

Denn bedeutet q^* eine Zahl, die zwar kleiner als q, aber immer noch größer ist als der größte unter den absoluten Beträgen der Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so ist auch

$$|D_\nu| \leqq (|D_0| + |D_1| + \cdots + |D_{r-1}|) C^* q^{*\nu},$$

also

$$\frac{|D_\nu|}{q^\nu} \leqq (|D_0| + |D_1| + \cdots + |D_{r-1}|) C^* \left(\frac{q^*}{q}\right)^\nu,$$

woraus wegen $\frac{q^*}{q} < 1$ die Behauptung folgt.

Die Formel (13.) ist ohne Beweis bereits von Herrn *Poincaré* angegeben (in der in meiner früheren Arbeit zitierten Abhandlung). Nicht ausgesprochen, aber faktisch bewiesen ist sie in einer Arbeit des Herrn *E. B. van Vleck**). Dort wird nämlich gezeigt, daß der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$$

mindestens gleich $\frac{1}{q_1}$ ist, wenn q_1 den größten absoluten Betrag der Wurzeln der charakteristischen Gleichung bedeutet. Für $q > q_1$ ist daher die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{D_\nu}{q^\nu}$$

gewiß konvergent, so daß in der Tat die Beziehung (13.) besteht. Ich werde indes für den Satz einen neuen etwas einfacheren Beweis beibringen.

---

*) On linear criteria for the determination of the radius of convergence of a power series. Transactions of the American mathematical society, vol. 1 (1900).

Hilfssatz II. Sind alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung von Null verschieden und bedeutet q' irgendeine positive Zahl, die kleiner ist als der kleinste unter den absoluten Beträgen dieser Wurzeln, so gilt für alle diejenigen Integrale D_ν, welche für unendlich viele Werte ihres Index von Null verschieden sind, die Beziehung

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{|D_\nu|}{q'^\nu} = \infty.$$

Hilfssatz III. Zerlegt man die linke Seite der charakteristischen Gleichung

$$f(x) \equiv x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \cdots + a_r = 0$$

irgendwie in zwei Faktoren

$$f(x) = \varphi(x)\,\omega(x),$$

wobei

$$\varphi(x) = x^{r-e} + b_1 x^{r-e-1} + b_2 x^{r-e-2} + \cdots + b_{r-e},$$
$$\omega(x) = x^e + c_1 x^{e-1} + c_2 x^{e-2} + \cdots + c_e,$$

derart, daß jede Wurzel von $\varphi(x)$ absolut kleiner ist als jede Wurzel von $\omega(x)$, so gibt es eine Zahl N von der Beschaffenheit, daß für $\nu \geqq N$ die linke Seite der Differenzengleichung (1.) *identisch auf die Form gebracht werden kann:*

$$\begin{aligned} &D_{\nu+r} + c_1^{(\nu+r-e)} D_{\nu+r-1} + \cdots + c_e^{(\nu+r-e)} D_{\nu+r-e} \\ &+ b_1^{(\nu)} (D_{\nu+r-1} + c_1^{(\nu+r-e-1)} D_{\nu+r-2} + \cdots + c_e^{(\nu+r-e-1)} D_{\nu+r-e-1}) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ b_{r-e}^{(\nu)} (D_{\nu+e} + c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \cdots + c_e^{(\nu)} D_\nu), \end{aligned}$$

und zwar dergestalt, daß

$$\lim_{\nu=\infty} b_i^{(\nu)} = b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots r-e)$$
$$\lim_{\nu=\infty} c_k^{(\nu)} = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots e)$$

und daß außerdem dauernd $c_e^{(\nu)} \neq 0$ wird.

Diese Umformung läßt sich symbolisch als Faktorenzerlegung schreiben, wie sie analog auch bei Differentialgleichungen üblich ist. Führt man nämlich die Symbole ein:

$$F(D) \equiv D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu,$$
$$\Phi(E) \equiv E_{\nu+r-e} + b_1^{(\nu)} E_{\nu+r-e-1} + \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} E_\nu,$$
$$\Omega(D) \equiv D_{\nu+e} + c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \cdots + c_e^{(\nu)} D_\nu,$$

so erhält man einfach

$$F = \Phi\Omega,$$

entsprechend der Zerlegung $f(x) = \varphi(x)\,\omega(x)$.

Bevor wir die Beweise für diese Hilfssätze in Angriff nehmen, soll zunächst gezeigt werden, wie aus ihnen der Fundamentalsatz mitsamt seinem Zusatz gefolgert werden kann. Sind erstens alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung von gleichem absolutem Betrag, er sei ϱ, so gilt für jedes Integral nach Hilfssatz I die Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{(\varrho+\varepsilon)^\nu} = 0,$$

wie klein auch die positive Zahl ε sein mag; hieraus folgt sogleich

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} \leqq \varrho.$$

Ist $\varrho = 0$, so sind damit Fundamentalsatz und Zusatz bereits bewiesen. Ist aber $\varrho > 0$, so besteht nach Hilfssatz II für jedes Integral, welches für unendlich viele ν-Werte von Null verschieden ist, noch die weitere Beziehung

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{|D_\nu|}{(\varrho-\varepsilon)^\nu} = \infty,$$

also auch

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} \geqq \varrho,$$

woraus zusammen mit dem vorigen folgt:

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} = \varrho.$$

Damit ist auch für diesen Fall alles bewiesen.

Weit schwieriger gestaltet sich die Sache, wenn zweitens nicht alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung den nämlichen absoluten Betrag haben. Wir zerlegen dann die linke Seite $f(x)$ irgendwie in zwei Faktoren

$$f(x) = \varphi(x)\,\omega(x), \tag{14.}$$

wobei

$$\varphi(x) = x^{r-e} + b_1 x^{r-e-1} + b_2 x^{r-e-2} + \cdots + b_{r-e}, \tag{15.}$$

$$\omega(x) = x^e + c_1 x^{e-1} + c_2 x^{e-2} + \cdots + c_e, \tag{16.}$$

derart, daß jede Wurzel von $\varphi(x)$ absolut kleiner ist als jede Wurzel von $\omega(x)$. Dann kann $\omega(x)$ auf keinen Fall die Wurzel $x=0$ haben, und folglich ist

$$c_e \neq 0. \tag{17.}$$

Weiter verstehen wir unter N die in Hilfssatz III angegebene Zahl und sehen vorläufig von denjenigen Gleichungen ab, welche aus (1.) für $\nu = 0, 1, \ldots N-1$ hervorgehen. Das heißt, wir studieren zunächst nur die Differenzengleichung

$$D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0. \quad (\nu = N, N+1, N+2, \ldots) \tag{1a.}$$

Es ist evident, daß jedes Integral von (1.) auch ein Integral von (1a.) ist. Das Umgekehrte kann aber mit Sicherheit nur dann behauptet werden, wenn $a_r^{(\nu)} \neq 0$ ist für alle ν. In diesem Fall kann nämlich, wenn D_ν für $\nu \geqq N$ irgendein Integral von (1a.) ist, dies zu einem Integral von (1.) ergänzt werden, indem man die fehlenden Werte $D_{N-1}, D_{N-2}, \ldots D_0$ sukzessive aus den Gleichungen

$$D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0 \qquad (\nu = N-1, N-2, \ldots 0)$$

berechnet.

Indem wir von jetzt ab in diesem Paragraphen überhaupt die Zahl ν auf die Werte $\nu \geqq N$ beschränken, kann nach Hilfssatz III die Differenzengleichung (1ª.) auf die Form

$$(18.) \qquad E_{\nu+r-e} + b_1^{(\nu)} E_{\nu+r-e-1} + b_2^{(\nu)} E_{\nu+r-e-2} + \cdots + b_{r-e}^{(\nu)} E_\nu = 0$$

gebracht werden, wobei zur Abkürzung

$$(19.) \qquad D_{\nu+e} + c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + c_2^{(\nu)} D_{\nu+e-2} + \cdots + c_e^{(\nu)} D_\nu = E_\nu$$

gesetzt wurde. Zugleich wird dann

$$(20.) \qquad \lim_{\nu=\infty} b_i^{(\nu)} = b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots r-e)$$
$$\lim_{\nu=\infty} c_k^{(\nu)} = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots e)$$

und außerdem für alle ν

$$(21.) \qquad c_e^{(\nu)} \neq 0.$$

Dadurch ist die Integration der Differenzengleichung r-ter Ordnung (1ª.) zurückgeführt auf die homogene Gleichung (18.) von der $(r-e)$-ten und die inhomogene Gleichung (19.) von der e-ten Ordnung. Bezeichnet man nämlich mit

$$(22.) \qquad E_\nu^{(1)}, E_\nu^{(2)}, \ldots E_\nu^{(r-e)}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (18.), ferner mit

$$(23.) \qquad D_\nu^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots r-e)$$

je ein beliebiges Partikulärintegral der *inhomogenen* Gleichungen

$$(24.) \qquad D_{\nu+e} + c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \cdots + c_e^{(\nu)} D_\nu = E_\nu^{(i)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots r-e)$$

endlich mit

$$(25.) \qquad D_\nu^{(r-e+1)},\ D_\nu^{(r-e+2)},\ \dots\ D_\nu^{(r)}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der *homogenen* Gleichung

$$(26.) \qquad D_{\nu+e} + c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \cdots + c_e^{(\nu)} D_\nu = 0,$$

so bilden die r Funktionen

$$(27.) \qquad D_\nu^{(1)},\ D_\nu^{(2)},\ \dots\ D_\nu^{(r)}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1a.). Denn daß sie alle der Gleichung (1a.) genügen, ist ja evident. Sie sind aber auch linear unabhängig. Bestände nämlich eine Relation der Form

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i D_\nu^{(i)} = 0,$$

wo die Koeffizienten γ_i von ν nicht abhängen, so würde daraus auch folgen

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i (D_{\nu+e}^{(i)} + c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1}^{(i)} + \cdots + c_e^{(\nu)} D_\nu^{(i)}) = 0,$$

oder auch mit Rücksicht auf die Bedeutung der $D_\nu^{(i)}$:

$$\sum_{i=1}^{r-e} \gamma_i E_\nu^{(i)} = 0$$

für alle ν; daher wegen der linearen Unabhängigkeit der Integrale (22.):

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_{r-e} = 0.$$

Es bleibt dann noch

$$\gamma_{r-e+1} D_\nu^{(r-e+1)} + \gamma_{r-e+2} D_\nu^{(r-e+2)} + \cdots + \gamma_r D_\nu^{(r)} = 0,$$

also, da die Integrale (25.) linear unabhängig sind, auch

$$\gamma_{r-e+1}=\gamma_{r-e+2}=\cdots=\gamma_r=0.$$

Daher bilden in der Tat die r Integrale (27.) ein Fundamentalsystem für die Gleichung (1ª.).

Bezeichnet man nun mit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{r-e}$ die Wurzeln von $\varphi(x)$, mit $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_e$ die Wurzeln von $\omega(x)$, so ist nach Voraussetzung

$$|\sigma_i| < |\tau_k| . \qquad (i=1,2,\ldots r-e;\ k=1,2,\ldots e)$$

Man kann also zwei positive Zahlen σ, τ angeben, die den Ungleichungen

$$(28.) \qquad |\sigma_i| < \sigma < \tau < |\tau_k| \qquad (i=1,2,\ldots r-e;\ k=1,2,\ldots e)$$

genügen. Die Anwendung von Hilfssatz I auf die Differenzengleichung (18.) liefert dann für deren Integrale $E_\nu^{(i)}$ die Ungleichung

$$(29.) \qquad |E_\nu^{(i)}| < M\sigma^\nu,$$

wo M von ν nicht abhängt.

Die inhomogene Gleichung (24.) suchen wir nun durch den formalen Ansatz

$$(30.) \qquad D_\nu = p_0^{(\nu)} E_\nu^{(i)} + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1}^{(i)} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2}^{(i)} + \cdots \text{ in infin.}$$

zu befriedigen. Es ist dann auch

$$D_{\nu+1} = p_0^{(\nu+1)} E_{\nu+1}^{(i)} + p_1^{(\nu+1)} E_{\nu+2}^{(i)} + p_2^{(\nu+1)} E_{\nu+3}^{(i)} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_{\nu+e} = p_0^{(\nu+e)} E_{\nu+e}^{(i)} + p_1^{(\nu+e)} E_{\nu+e+1}^{(i)} + p_2^{(\nu+e)} E_{\nu+e+2}^{(i)} + \cdots.$$

Setzt man dies aber in die Gleichung (24.) ein, so wird diese offenbar identisch befriedigt, wenn man die $p_i^{(\nu)}$ den folgenden Bedingungsgleichungen unterwirft:

$$
\begin{aligned}
&c_e^{(\nu)} p_0^{(\nu)} = 1\,,\\
&c_e^{(\nu)} p_1^{(\nu)} + c_{e-1}^{(\nu)} p_0^{(\nu+1)} = 0\,,\\
&c_e^{(\nu)} p_2^{(\nu)} + c_{e-1}^{(\nu)} p_1^{(\nu+1)} + c_{e-2}^{(\nu)} p_0^{(\nu+2)} = 0\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_e^{(\nu)} p_\lambda^{(\nu)} + c_{e-1}^{(\nu)} p_{\lambda-1}^{(\nu+1)} + \cdots + c_1^{(\nu)} p_{\lambda-e+1}^{(\nu+e-1)} + p_{\lambda-e}^{(\nu+e)} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots

Ihre charakteristische Gleichung lautet also

$$x^e + \frac{c_{e-1}}{c_e} x^{e-1} + \frac{c_{e-2}}{c_e} x^{e-2} + \cdots + \frac{c_1}{c_e} x + \frac{1}{c_e} = 0$$

und hat folglich die Wurzeln

$$\frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}, \cdots \frac{1}{\tau_e}.$$

Daher ist nach Hilfssatz I, angewandt auf die Gleichung (33.):

$$(34.) \qquad |p_\lambda^{(\nu)}| \leqq (|p_0^{(\nu)}| + |p_1^{(\nu)}| + \cdots + |p_{e-1}^{(\nu)}|)\, C \frac{1}{\tau^\lambda},$$

wo nun τ die in (28.) eingeführte Zahl bedeutet, und wo C nicht von λ abhängt, aber auch nicht von den Anfangswerten $p_0^{(\nu)}, p_1^{(\nu)}, \ldots p_{e-1}^{(\nu)}$, und überhaupt nicht von ν*).

Hieraus und aus (29.) folgt wegen $\sigma < \tau$ bereits die absolute Konvergenz der Reihe (30.). Wir können daher für das in (23.) eingeführte Partikulärintegral $D_\nu^{(i)}$ der Gleichung (24.) speziell das durch die Reihe (30.) dargestellte Integral wählen; also

$$(35.) \qquad D_\nu^{(i)} = p_0^{(\nu)} E_\nu^{(i)} + p_1^{(\nu)} E_{\nu+1}^{(i)} + p_2^{(\nu)} E_{\nu+2}^{(i)} + \cdots . \qquad (i=1, 2, \ldots r-e)$$

Aus (29.) und (34.) ergibt sich dann die Abschätzungsformel:

$$(36.) \qquad \begin{aligned} |D_\nu^{(i)}| &\leqq (|p_0^{(\nu)}| + |p_1^{(\nu)}| + \cdots + |p_{e-1}^{(\nu)}|)\, C M \left(\sigma^\nu + \frac{\sigma^{\nu+1}}{\tau} + \frac{\sigma^{\nu+2}}{\tau^2} + \cdots\right) \\ &= (|p_0^{(\nu)}| + |p_1^{(\nu)}| + \cdots + |p_{e-1}^{(\nu)}|) \frac{C M \tau}{\tau - \sigma} \sigma^\nu, \qquad (i=1, 2, \ldots r-e) \end{aligned}$$

wo C und M von ν nicht abhängen.

---

*) Die auf Seite 20 gegebene Formulierung des Hilfssatzes I läßt bei Anwendung auf Gleichung (33.) die völlige Unabhängigkeit der Zahl C von ν noch nicht erkennen, weil C sehr wohl von den Koeffizienten der Gleichung (33.) abhängt. Allein in diesen Koeffizienten kommt ν nur in der Verbindung $\nu + \lambda$ vor, (wo λ die unabhängige Variable der Differenzengleichung ist), und dann zeigt die genaue Bestimmung von C, die wir beim Beweis des Hilfssatzes I auf Seite 35—38 geben werden, bei Anwendung auf Gleichung (33.) in der Tat, daß C auch von ν unabhängig angenommen werden darf.

Wir werden indes diese Formel noch in etwas verbesserter Gestalt benötigen, die sogleich hergeleitet werden soll. Die Gleichungssysteme (31.) oder (32.) lehren nämlich, daß die Zahlen $p_\lambda^{(\nu)}$ bei konstantem λ mit wachsendem ν gegen gewisse Grenzwerte konvergieren:

$$\lim_{\nu=\infty} p_\lambda^{(\nu)} = p_\lambda,$$

welche sich eindeutig aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &c_e p_0 = 1, \\ &c_e p_1 + c_{e-1} p_0 = 0, \\ &c_e p_2 + c_{e-1} p_1 + c_{e-2} p_0 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

berechnen. Da sich also insbesondere auch der Ausdruck

$$|p_0^{(\nu)}| + |p_1^{(\nu)}| + \cdots + |p_{e-1}^{(\nu)}|$$

einer Grenze nähert, so bleibt er für alle ν unter einer von ν unabhängigen Konstanten, so daß die Formel (36.) die Gestalt annimmt:

$$(37.) \qquad |D_\nu^{(i)}| < K\sigma^\nu, \qquad (i=1, 2, \ldots r-e)$$

wo nun K eine von ν unabhängige Konstante ist.

Hieraus folgt dann für jedes Integral von (1a.), welches der $(r-e)$-gliedrigen linearen Schar

$$(38.) \qquad \overline{D}_\nu = \gamma_1 D_\nu^{(1)} + \gamma_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + \gamma_{r-e} D_\nu^{(r-e)}$$

angehört, die Beziehung

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|\overline{D}_\nu|} \leqq \sigma;$$

da aber σ den größten absoluten Betrag der Wurzeln σ_i nur beliebig wenig zu übertreffen braucht, so ist auch

$$\text{(39.)} \qquad \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} \leqq \text{Max}\,(|\sigma_1|, |\sigma_2| \ldots |\sigma_{r-e}|).$$

Unter diesen Integralen D_ν können sich übrigens auch solche finden, die für hinreichend große Werte von ν dauernd verschwinden.

Ganz anders verhalten sich dagegen die Funktionen

$$\text{(25.)} \qquad D_\nu^{(r-e+1)}, D_\nu^{(r-e+2)}, \ldots D_\nu^{(r)},$$

d. h. die Integrale der *homogenen* Differenzengleichung

$$\text{(26.)} \qquad D_{\nu+e} + c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + c_2^{(\nu)} D_{\nu+e-2} + \cdots + c_e^{(\nu)} D_\nu = 0.$$

Für diese und ihre linearen Verbindungen

$$\overline{\overline{D}}_\nu = \gamma_{r-e+1} D_\nu^{(r-e+1)} + \gamma_{r-e+2} D_\nu^{(r-e+2)} + \cdots + \gamma_r D_\nu^{(r)}$$

gilt nämlich nach Hilfssatz II die Beziehung*)

$$\text{(40.)} \qquad \limsup_{\nu=\infty} \frac{|\overline{\overline{D}}_\nu|}{\tau^\nu} = \infty;$$

das gleiche gilt dann aber wegen (37.) offenbar auch für jedes Integral der Form

$$D_\nu = \gamma_1 D_\nu^{(1)} + \gamma_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + \gamma_r D_\nu^{(r)},$$

sofern nicht gerade

$$\gamma_{r-e+1} = \gamma_{r-e+2} = \cdots = \gamma_r = 0$$

ist, also für jedes Integral von (1ª.), welches nicht zufällig der linearen

*) Bei Anwendung von Hilfssatz II auf die Gleichung (26.) beachte man, daß wegen $c_e^{(\nu)} \neq 0$ keine solchen Integrale vorkommen, welche von einem gewissen ν-Wert ab dauernd verschwinden.

Schar (38.) angehört. Es ist daher, wenn man von den Integralen dieser Schar absieht, stets:

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{|D_\nu|}{\tau^\nu} = \infty,$$

woraus folgt:

$$\limsup_{\nu=\infty} |\sqrt[\nu]{D_\nu}| \geqq \tau.$$

Da aber τ nur beliebig wenig kleiner zu sein braucht als der kleinste absolute Betrag der Wurzeln τ_k, so erhält man auch:

$$(41.) \qquad \limsup_{\nu=\infty} |\sqrt[\nu]{D_\nu}| \geqq \text{Min } (|\tau_1|, |\tau_2|, \ldots |\tau_e|).$$

Es gibt somit genau $r-e$ linear unabhängige Integrale von (1a.), *nämlich diejenigen der $(r-e)$-gliedrigen linearen Schar* (38.), *für welche die Beziehung*

$$\limsup_{\nu=\infty} |\sqrt[\nu]{D_\nu}| \leqq \text{Max } (|\sigma_1|, |\sigma_2|, \ldots |\sigma_{r-e}|)$$

statthat. Für alle andern Integrale ist dagegen

$$\limsup_{\nu=\infty} |\sqrt[\nu]{D_\nu}| \geqq \text{Min } (|\tau_1|, |\tau_2|, \ldots |\tau_e|).$$

Hieraus folgt nun unschwer der Fundamentalsatz. Wenn nämlich $q_1, q_2, \ldots q_\sigma$ und $e_1, e_2, \ldots e_\sigma$ die dort angegebene Bedeutung haben, so kann man die linke Seite der charakteristischen Gleichung in σ Faktoren zerlegen

$$f(x) = \varphi_\sigma(x)\varphi_{\sigma-1}(x)\cdots\varphi_2(x)\varphi_1(x),$$

wobei allgemein $\varphi_\lambda(x)$ ein Polynom vom Grade e_λ ist, dessen sämtliche Wurzeln absolut gleich q_λ sind. Ordnet man daher die q in der Reihenfolge

$$(42.) \qquad q_1 > q_2 > \cdots > q_\sigma,$$

und setzt, unter λ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots \sigma-1$ verstehend,

$$\varphi_\sigma(x)\,\varphi_{\sigma-1}(x)\cdots\varphi_{\lambda+1}(x)=\varphi(x),$$
$$\varphi_\lambda(x)\,\varphi_{\lambda-1}(x)\cdots\varphi_1(x)=\omega(x),$$

so ist

$$\varphi(x) \text{ vom Grade } e_\sigma+e_{\sigma-1}+\cdots+e_{\lambda+1},$$
$$\omega(x) \text{ vom Grade } e_\lambda+e_{\lambda-1}+\cdots+e_1.$$

Ferner sind die Wurzeln von $\varphi(x)$ absolut kleiner als die von $\omega(x)$; die von $\varphi(x)$ sind nämlich $\leqq q_{\lambda+1}$; die von $\omega(x)$ dagegen $\geqq q_\lambda$. Es gibt daher nach obigem eine $(e_\sigma+e_{\sigma-1}+\cdots+e_{\lambda+1})$-gliedrige Schar von Integralen — wir bezeichnen sie generell mit D_ν^* —, für welche

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu^*|}\leqq q_{\lambda+1} \tag{43.}$$

ist, während für alle andern Integrale notwendig

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|}\geqq q_\lambda \tag{44.}$$

wird. Dies ist nun für $\lambda=1,2,\ldots\sigma-1$ bewiesen; es gilt aber mit geringen Modifikationen auch für $\lambda=0$ und $\lambda=\sigma$. Im Fall $\lambda=0$ ist die Schar D_ν^* r-gliedrig, d. h. *alle* Integrale gehören ihr an; und in der Tat besagt Hilfssatz I, daß für alle Integrale die Ungleichung (43.) mit $\lambda=0$ besteht; Ungleichung (44.) ist dann überflüssig, weil es außer der Schar D_ν^* keine Integrale mehr gibt. Im Fall $\lambda=\sigma$ dagegen ist die Schar D_ν^* nullgliedrig, d. h. sie ist nicht vorhanden, so daß jetzt (43.) überflüssig ist. Die Ungleichung (44.) dagegen besteht nach Hilfssatz II zwar *nicht für alle* Integrale, aber doch sicher für diejenigen, welche unendlich oft von Null verschieden sind.

Indem man jetzt $\lambda-1$ an Stelle von λ setzt, gibt es ebenso eine $(e_\sigma+e_{\sigma-1}+\cdots+e_\lambda)$-gliedrige Schar von Integralen, für welche analog zu (43.) die Beziehung

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|}\leqq q_\lambda \tag{45.}$$

statthat, während für alle andern Integrale dies nicht gilt; hierbei kann

dann λ jede der Zahlen $1, 2, \ldots \sigma$ sein. Dieser Schar gehören a fortiori die Integrale D_ν^* an; außerdem aber, da ihre Dimension um e_λ größer ist als die der Schar D_ν^*, noch genau e_λ weitere linear unabhängige Integrale. Für diese letzteren oder genauer für ihre ganze e_λ-gliedrige lineare Schar gilt dann einerseits (45.), andrerseits aber, weil sie nicht zu den Integralen D_ν^* gehören, auch (44.). Daher ist für diese e_λ Integrale und ihre linearen Verbindungen notwendig

$$\lim_{\nu=\infty} \sup \sqrt[\nu]{|D_\nu|} = q_\lambda .$$

Diese Überlegung gilt nun unbedingt für die Werte $\lambda = 1, 2, \ldots \sigma - 1$; für diese kann also, weil dann $q_\lambda > q_\sigma \geqq 0$ ist, die e_λ-gliedrige Schar jedenfalls kein Integral enthalten, das von einem gewissen ν-Wert ab dauernd verschwindet. Für $\lambda = \sigma$ dagegen gilt die obige Gleichung wegen der Einschränkung, welche die Giltigkeit von (44.) in diesem Fall erfahren mußte, zwar auch für diejenigen Integrale der e_σ-gliedrigen Schar, welche unendlich oft von Null verschieden sind; die Schar kann aber jetzt sehr wohl auch solche Integrale enthalten, bei denen dies nicht zutrifft.

Damit ist zunächst für die Differenzengleichung (1ª.) der Fundamentalsatz im wesentlichen bewiesen, indem die oben gefundenen e_λ Integrale gerade die λ-te Klasse bilden. Nur die Integrale der σ-ten Klasse haben noch nicht die behauptete Eigenschaft, da unter diesen sich solche finden können, die von einem gewissen ν-Wert ab dauernd verschwinden. Ist aber, wie in der Formulierung des Fundamentalsatzes vorausgesetzt wurde, $a_r^{(\nu)} \neq 0$ für alle ν, so gibt es keine solchen Ausnahmsintegrale, so daß der Satz hiermit wirklich bewiesen ist. Er gilt dann aber nicht nur für die Differenzengleichung (1ª.), sondern auch für (1.), da ja jedes Integral von (1ª.) wegen $a_r^{(\nu)} \neq 0$ auch ein Integral von (1.) ist und umgekehrt. Bemerkt sei noch, daß die Integrale einer Klasse selbstverständlich nicht eindeutig bestimmt sind, sondern es können ihnen beliebige Integrale aus den folgenden Klassen hinzugefügt werden, ohne daß sie ihre charakteristischen Eigenschaften verlieren. Eindeutig ist nur diejenige Schar, welche die letzte (die σ-te) Klasse bildet, d. h. die *ausgezeichneten Integrale.*

Wird die Voraussetzung $a_r^{(\nu)} \neq 0$ nicht gemacht, so ist durch unsere Analyse jedenfalls der Fundamentalsatz für die Gleichung (1ª.) bewiesen

mit der obigen Modifikation bezüglich der σ-ten Klasse. Es ist daher für jedes Integral von (1ª.), welches unendlich oft von Null verschieden ist, der obere Limes

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|}$$

gleich einer der Zahlen q_λ. Das gleiche gilt dann aber auch für die Integrale der Gleichung (1.), da diese ja stets auch Integrale von (1ª.) sind (aber nicht umgekehrt). Damit ist der Zusatz auf Seite 20 nun ebenfalls vollständig bewiesen.

§ 4.

Nachträglicher Beweis von Hilfssatz I (S. 20).

Da die Koeffizienten $a_i^{(\nu)}$ mit wachsendem ν sich einer Grenze nähern, so gibt es eine positive Zahl A, derart, daß für alle ν

$$|a_i^{(\nu)}| < A \qquad (i=1, 2, \dots r) \tag{46.}$$

ausfällt. Dann folgt aus (1.):

$$|D_{\nu+r}| \leqq A\,(|D_{\nu+r-1}| + |D_{\nu+r-2}| + \cdots + |D_\nu|),$$

also a fortiori auch:

$$|D_{\nu+r}| + |D_{\nu+r-1}| + \cdots + |D_{\nu+1}| \leqq (A+1)\,(|D_{\nu+r-1}| + |D_{\nu+r-2}| + \cdots + |D_\nu|).$$

Hieraus wiederum ergibt sich:

$$|D_{\nu+r}| + |D_{\nu+r-1}| + \cdots + |D_{\nu+1}| \leqq (A+1)^{\nu+1}\,(|D_{r-1}| + |D_{r-2}| + \cdots + |D_0|),$$

und folglich erst recht:

$$|D_{\nu+r}| \leqq (A+1)^{\nu+1}\,(|D_0| + |D_1| + \cdots + |D_{r-1}|). \tag{47.}$$

Dabei hängt, worauf besonders zu achten ist, die Konstante $A+1$ nicht nur nicht von ν, sondern auch *nicht von den Anfangswerten* $D_0, D_1, \dots D_{r-1}$ *ab.*

Wir schreiben jetzt die Differenzengleichung (1.) in der Gestalt

$$(48.)\quad D_{\nu+r}+(a_1+k_1^{(\nu)})\,D_{\nu+r-1}+(a_2+k_2^{(\nu)})\,D_{\nu+r-2}+\cdots+(a_r+k_r^{(\nu)})\,D_\nu=0,$$

wobei dann

$$(49.)\qquad \lim_{\nu=\infty} k_i^{(\nu)}=0 \qquad (i=1,2,\dots r)$$

ist. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_r$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung in irgendeiner Reihenfolge, so führen wir noch die Größen ein:

$$(50.)\qquad \begin{aligned} &D_{\nu+1}-\varrho_1 D_\nu = D_{\nu+1}^{(1)},\\ &D_{\nu+1}^{(1)}-\varrho_2 D_\nu^{(1)} = D_{\nu+1}^{(2)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &D_{\nu+1}^{(r-1)}-\varrho_r D_\nu^{(r-1)} = D_{\nu+1}^{(r)}. \end{aligned}$$

Hierdurch sind, wenn i eine der Zahlen $1, 2, \dots r$ bedeutet, die Größen $D_{\nu+i}^{(i)}$ für $\nu \geqq 0$ definiert, und der Gleichmäßigkeit halber werden wir statt D_ν manchmal auch $D_\nu^{(0)}$ schreiben. Es ist dann augenscheinlich:

$$(51.)\qquad \begin{aligned} D_{\nu+0}^{(0)} &= D_\nu,\\ D_{\nu+1}^{(1)} &= D_{\nu+1}-\varrho_1 D_\nu,\\ D_{\nu+2}^{(2)} &= D_{\nu+2}-(\varrho_1+\varrho_2)\,D_{\nu+1}+\varrho_1\varrho_2\,D_\nu,\\ D_{\nu+3}^{(3)} &= D_{\nu+3}-(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)\,D_{\nu+2}\\ &\quad +(\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3)\,D_{\nu+1}-\varrho_1\varrho_2\varrho_3\,D_\nu\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die letzte dieser Gleichungen lautet, indem man für die elementaren symmetrischen Funktionen der Wurzeln ϱ_i sogleich die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung einsetzt:

$$(51^{a}.)\qquad D_{\nu+r}^{(r)} = D_{\nu+r}+a_1 D_{\nu+r-1}+a_2 D_{\nu+r-2}+\cdots+a_r D_\nu.$$

Also wird nach (48.) auch

$$(52.)\qquad -D_{\nu+r}^{(r)} = k_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1}+k_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2}+\cdots+k_r^{(\nu)} D_\nu.$$

Addiert man die $r-i$ letzten der Gleichungen (50.) zueinander, so erhält man noch:

$$(53.)\quad D_{\nu+1}^{(i)} = \varrho_{i+1} D_\nu^{(i)} + \varrho_{i+2} D_\nu^{(i+1)} + \cdots + \varrho_r D_\nu^{(r-1)} + D_{\nu+1}^{(r)}. \qquad (i=0, 1, \ldots r-1)$$

Endlich definieren wir, wenn q die in Hilfssatz I angegebene Bedeutung hat, wenn also

$$(54.)\qquad q > \mathrm{Max}\,(|\varrho_1|, |\varrho_2|, \ldots |\varrho_r|)$$

ist, noch $r+1$ Zahlen $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_r$ in folgender Weise:

$$(55.)\qquad \begin{aligned} \eta_0 &= 1, \\ \eta_1 &= \Big(1 - \frac{|\varrho_1|}{q}\Big)\eta_0, \\ \eta_2 &= \Big(1 - \frac{|\varrho_2|}{q}\Big)\eta_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \eta_r &= \Big(1 - \frac{|\varrho_r|}{q}\Big)\eta_{r-1}. \end{aligned}$$

Die η_i sind dann ebenfalls positiv, und, indem man die $r-i$ letzten der Gleichungen (55.) zueinander addiert, ergibt sich noch:

$$(56.)\qquad \eta_i = \frac{|\varrho_{i+1}|}{q}\eta_i + \frac{|\varrho_{i+2}|}{q}\eta_{i+1} + \cdots + \frac{|\varrho_r|}{q}\eta_{r-1} + \eta_r. \qquad (i=0, 1, \ldots r-1)$$

Nach diesen Vorbereitungen gestaltet sich der Beweis nun folgendermaßen.

Wegen (49.) kann man einen Index N angeben, derart, daß für $\nu \geqq N$ durchweg

$$(57.)\qquad |k_i^{(\nu)}| < \frac{\eta_r q^r}{1 + q + q^2 + \cdots + q^{r-1}} \qquad (i=1, 2, \ldots r;\ \nu \geqq N)$$

wird. Nach (47.) müssen dann die Zahlen

$$(58.)\qquad D_0, D_1, D_2, \ldots D_{N+r-1}$$

absolut alle unterhalb einer Schranke

$$M(|D_0|+|D_1|+\cdots+|D_{r-1}|)$$

bleiben, wobei M etwa gleich $(A+1)^N$ gesetzt werden kann und daher jedenfalls nicht von $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ abhängt. Weiter bleiben aber auch die Zahlen

$$(59). \qquad D_i^{(i)}, D_{i+1}^{(i)}, D_{i+2}^{(i)}, \ldots D_{N+r-1}^{(i)}, \qquad (i=0, 1, \ldots r-1)$$

die sich nach (51.) ja linear aus je $i+1$ der Zahlen (58.) zusammensetzen, absolut genommen unter dieser Schranke, wobei nur für M eine etwas größere Zahl zu wählen ist, die aber ebenfalls nicht von $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ abhängt. Es genügt, wie sofort zu sehen, die Annahme

$$M=(A+1)^N(1+q)^{r-1}.$$

Hiernach gibt es nun sicher eine von den Anfangswerten $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ unabhängige Zahl C, die so groß ist, daß die Ungleichungen

$$(60.) \qquad |D_\lambda^{(i)}| \leqq C(|D_0|+|D_1|+\cdots+|D_{r-1}|)\eta_i q^\lambda \qquad (i=0,1,\ldots r-1)$$

für $\lambda=i, i+1, \ldots N+r-1$ bestehen. Man braucht ja für C nur etwa die größte der Zahlen

$$\frac{M}{\eta_i q^\lambda} \qquad (i=0,1,\ldots r-1;\ \lambda=i,i+1,\ldots N+r-1)$$

zu wählen, also, da nach (55.) $\eta_{i+1} \leqq \eta_i$ ist:

$$C=\frac{M}{\eta_{r-1}}, \text{ wenn } q \geqq 1;$$

$$C=\frac{M}{\eta_{r-1}\, q^{N+r-1}}, \text{ wenn } q \leqq 1.$$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion, daß die Ungleichung (60.) auch noch für $\lambda=N+r, N+r+1, \ldots$ bestehen bleibt. Es sei also ν

ein beliebiger Index: $\nu \geqq N$. Dann nehmen wir an, die Ungleichung (60.) sei bereits bewiesen für $\lambda = i, i+1, \ldots \nu+r-1$, und zeigen, daß sie dann auch für $\lambda = \nu+r$ gilt.

Zunächst folgt aus (52.):

$$|D^{(r)}_{\nu+r}| \leqq |k^{(\nu)}_1 D_{\nu+r-1}| + |k^{(\nu)}_2 D_{\nu+r-2}| + \cdots + |k^{(\nu)}_r D_\nu|.$$

Allein hier kann man die einzelnen Terme der rechten Seite nach (57.) und (60.) abschätzen, da ja (60.) nach Annahme für $\lambda \leqq \nu+r-1$ gelten soll. Dadurch erhält man:

$$(61.)\quad \begin{aligned} |D^{(r)}_{\nu+r}| &\leqq \frac{\eta_r q^r}{1+q+\cdots+q^{r-1}} C(|D_0|+\cdots+|D_{r-1}|)\,\eta_0 (q^{\nu+r-1}+q^{\nu+r-2}+\cdots+q^\nu) \\ &= C(|D_0|+|D_1|+\cdots+|D_{r-1}|)\,\eta_r q^{\nu+r}. \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich aus (53.), wenn man dort $\nu+r-1$ an Stelle von ν setzt:

$$|D^{(i)}_{\nu+r}| \leqq |\varrho_{i+1} D^{(i)}_{\nu+r-1}| + |\varrho_{i+2} D^{(i+1)}_{\nu+r-1}| + \cdots + |\varrho_r D^{(r-1)}_{\nu+r-1}| + |D^{(r)}_{\nu+r}|. \quad {\scriptstyle (i=0,1,\ldots r-1)}$$

Hier wiederum kann man den letzten Term der rechten Seite nach (61.), die vorhergehenden nach (60.) abschätzen. Es kommt dann:

$$|D^{(i)}_{\nu+r}| \leqq C(|D_0|+|D_1|+\cdots+|D_{r-1}|)\,Q_i,$$

wobei

$$\begin{aligned} Q_i &= |\varrho_{i+1}|\,\eta_i q^{\nu+r-1} + |\varrho_{i+2}|\eta_{i+1} q^{\nu+r-1} + \cdots + |\varrho_r|\eta_{r-1} q^{\nu+r-1} + \eta_r q^{\nu+r} \\ &= q^{\nu+r}\Big(\frac{|\varrho_{i+1}|}{q}\eta_i + \frac{|\varrho_{i+2}|}{q}\eta_{i+1} + \cdots + \frac{|\varrho_r|}{q}\eta_{r-1} + \eta_r\Big) \end{aligned}$$

ist. Da aber diese letzte Klammergröße nach (56.) den Wert η_i hat, so erhält man endlich:

$$|D^{(i)}_{\nu+r}| \leqq C(|D_0|+|D_1|+\cdots+|D_{r-1}|)\,\eta_i q^{\nu+r}. \quad {\scriptstyle (i=0,1,\ldots r-1)}$$

Dies ist nun gerade die Ungleichung (60.) für den Wert $\lambda = \nu+r$. W. z. b. w.

Da somit die Ungleichung (60.) für alle Werte von λ gilt, so ist insbesondere auch, indem man den Spezialwert $i=0$ hervorhebt;

$$|D_\lambda| \leqq C(|D_0|+|D_1|+\cdots+|D_{r-1}|)\, q^\lambda$$

für alle λ, womit Hilfssatz I bewiesen ist. Offenbar kann man dabei auch das Gleichheitszeichen unterdrücken, wenn man von dem interesselosen Fall absieht, daß alle D_λ, also schon die r Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots D_{r-1}$ verschwinden.

§ 5.

Nachträglicher Beweis von Hilfssatz II (S. 22).

Diesen Satz beweisen wir indirekt, indem wir annehmen, der obere Limes von $\frac{|D_\nu|}{q'^\nu}$ sei nicht ∞. Dann gibt es also eine Schranke G, derart, daß für alle ν

$$\frac{|D_\nu|}{q'^\nu} < G \tag{62.}$$

wird. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung seien wieder $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$. Da sie im Hilfssatz II alle von Null verschieden sind, so ist auch $a_r \neq 0$, und daher mindestens für hinreichend große Werte von ν auch $a_r^{(\nu)} \neq 0$. Da wir hier außerdem nur solche Integrale D_ν betrachten, die für unendlich viele ν-Werte von Null verschieden sind, so gibt es eine Zahl N von der Beschaffenheit, daß

$$D_N \neq 0 \tag{63.}$$

und daß zugleich

$$a_r^{(\nu)} \neq 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq N \tag{64.}$$

ist.

Aus (1.) folgt nun für $\nu = N,\ N+1, \ldots N+\lambda$, wo λ beliebig groß sein darf:

$$\begin{aligned}
&D_{N+r} + a_1^{(N)} D_{N+r-1} + \cdots + a_r^{(N)} D_N = 0,\\
&D_{N+r+1} + a_1^{(N+1)} D_{N+r} + \cdots + a_r^{(N+1)} D_{N+1} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&D_{N+\lambda+r} + a_1^{(N+\lambda)} D_{N+\lambda+r-1} + \cdots + a_r^{(N+\lambda)} D_{N+\lambda} = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen multiplizieren wir der Reihe nach mit $\chi_r, \chi_{r+1}, \cdots \chi_{r+\lambda}$ und addieren sie dann. Dabei wählen wir die Multiplikatoren χ_ν in der Weise, daß aus dem Endresultat die Größen

$$D_{N+1}, D_{N+2}, \ldots D_{N+\lambda}$$

herausfallen, während D_N den Koeffizienten -1 erhalten soll. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
(65.)\qquad D_N = {} & \chi_{\lambda+1} D_{N+\lambda+1} + \chi_{\lambda+2} (D_{N+\lambda+2} + a_1^{(N+\lambda-r+2)} D_{N+\lambda+1})\\
& + \cdots + \chi_{\lambda+r} (D_{N+\lambda+r} + a_1^{(N+\lambda)} D_{N+\lambda+r-1} + \cdots + a_{r-1}^{(N+\lambda)} D_{N+\lambda+1}),
\end{aligned}$$

und für die Größen χ_ν entstehen die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&a_r^{(N)} \chi_r = -1,\\
&a_{r-1}^{(N)} \chi_r + a_r^{(N+1)} \chi_{r+1} = 0,\\
(66.)\qquad &a_{r-2}^{(N)} \chi_r + a_{r-1}^{(N+1)} \chi_{r+1} + a_r^{(N+2)} \chi_{r+2} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\chi_\lambda + a_1^{(N+\lambda-r+1)} \chi_{\lambda+1} + a_2^{(N+\lambda-r+2)} \chi_{\lambda+2} + \cdots\\
&\qquad + a_{r-1}^{(N+\lambda-1)} \chi_{\lambda+r-1} + a_r^{(N+\lambda)} \chi_{\lambda+r} = 0.
\end{aligned}$$

Hieraus lassen sich die χ_ν wegen (64.) gerade eindeutig berechnen. Schreibt man die allgemeine (die $(\nu+1)$-te) Gleichung (66.) in der Gestalt

$$(67.)\qquad \chi_{\nu+r} + \frac{a_{r-1}^{(N+\nu-1)}}{a_r^{(N+\nu)}} \chi_{\nu+r-1} + \cdots + \frac{a_1^{(N+\nu-r+1)}}{a_r^{(N+\nu)}} \chi_{\nu+1} + \frac{1}{a_r^{(N+\nu)}} \chi_\nu = 0,$$

so erkennt man, daß die χ_ν einer Differenzengleichung r-ter Ordnung genügen, deren Koeffizienten mit wachsendem Index gegen die Grenzwerte

$$\frac{a_{r-1}}{a_r}, \frac{a_{r-2}}{a_r}, \cdots \frac{a_1}{a_r}, \frac{1}{a_r}$$

konvergieren. Ihre charakteristische Gleichung lautet also

$$x^r + \frac{a_{r-1}}{a_r} x^{r-1} + \frac{a_{r-2}}{a_r} x^{r-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_r} x + \frac{1}{a_r} = 0$$

und hat daher die Wurzeln

$$\frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}, \cdots \frac{1}{\varrho_r}.$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$q' < \text{Min}\,(|\varrho_1|, |\varrho_2|, \cdots |\varrho_r|),$$

also

$$\frac{1}{q'} > \text{Max}\,\left(\frac{1}{|\varrho_1|}, \frac{1}{|\varrho_2|}, \cdots \frac{1}{|\varrho_r|}\right).$$

Wendet man daher Hilfssatz I oder vielmehr die daraus gefolgerte Gleichung (13.) S. 21 auf die Differenzengleichung (67.) an, so erhält man

$$\lim_{\nu=\infty} q'^{\nu} \chi_\nu = 0. \tag{68.}$$

Wäre nun die Ungleichung (62.) richtig für alle Werte von ν, also auch

$$\frac{|D_{N+\nu-i}|}{q'^{\nu}} < G\, q'^{N-i}, \qquad (i=0, 1, \cdots r-1)$$

so würde man aus (68.) folgern:

$$\lim_{\nu=\infty} \chi_\nu D_{N+\nu-i} = 0. \qquad (i=0, 1, \cdots r-1)$$

Daher sind die einzelnen Terme auf der rechten Seite der Gleichung (65.) absolut genommen ganz beliebig klein, wenn man nur λ genügend groß wählt. Da aber die Anzahl dieser Terme eine endliche und von λ unab-

hängige ist, so wird auch ihre Summe, also D_N absolut kleiner sein als eine beliebig kleine Zahl; daher $D_N = 0$, was aber gegen die Voraussetzung (63.) verstößt. Wegen dieses Widerspruches ist die Annahme (62.) nicht zulässig, und somit unser Satz bewiesen.

§ 6.

Nachträglicher Beweis für den Hilfssatz III (S. 22).

Ungleich schwieriger gestaltet sich der Beweis für den Hilfssatz III. Bei diesem handelt es sich um die Aufstellung der Identität

$$
\begin{aligned}
& D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu \\
\equiv\ & D_{\nu+r} + c_1^{(\nu+r-e)} D_{\nu+r-1} + \cdots + c_e^{(\nu+r-e)} D_{\nu+r-e} \\
& + b_1^{(\nu)} (D_{\nu+r-1} + c_1^{(\nu+r-e-1)} D_{\nu+r-2} + \cdots + c_e^{(\nu+r-e-1)} D_{\nu+r-e-1}) \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + b_{r-e}^{(\nu)} (D_{\nu+e} + c_1^{(\nu)} D_{\nu+e-1} + \cdots + c_e^{(\nu)} D_\nu),
\end{aligned}
\tag{69.}
$$

die wenigstens für hinreichend große Werte von ν bestehen soll. Diese Identität reicht gerade hin, um die r Zahlen

$$
\begin{aligned}
& c_1^{(\nu+r-e)}, c_2^{(\nu+r-e)}, \ldots c_e^{(\nu+r-e)}, \\
& b_1^{(\nu)}, \quad b_2^{(\nu)}, \quad \ldots b_{r-e}^{(\nu)}
\end{aligned}
$$

eindeutig zu berechnen, sobald die $c_k^{(\lambda)}$ mit kleinerem oberen Index schon bekannt sind, und speziell $c_e^{(\lambda)} \neq 0$ ist. Denn indem man zunächst die Koeffizienten von $D_\nu, D_{\nu+1}, \ldots D_{\nu+r-e-1}$ in (69.) beiderseits gleichsetzt, erhält man:

$$
\begin{aligned}
& b_{r-e}^{(\nu)} c_e^{(\nu)} = a_r^{(\nu)}, \\
& b_{r-e-1}^{(\nu)} c_e^{(\nu+1)} + b_{r-e}^{(\nu)} c_{e-1}^{(\nu)} = a_{r-1}^{(\nu)}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& b_1^{(\nu)} c_e^{(\nu+r-e-1)} + b_2^{(\nu)} c_{e-1}^{(\nu+r-e-2)} + b_3^{(\nu)} c_{e-2}^{(\nu+r-e-3)} + \cdots = a_{e+1}^{(\nu)} *).
\end{aligned}
\tag{70.}
$$

---

*) Auf der linken Seite dieser letzten Gleichung stehen e oder $r-e$ Terme, je nachdem $e \leqq r-e$ oder $e \geqq r-e$ ist. Der letzte Term ist demgemäß

$$b_e^{(\nu)} c_1^{(\nu+r-2e)} \text{ oder } b_{r-e}^{(\nu)} c_{2e-r+1}^{(\nu)}.$$

Ähnlich verhält es sich auch späterhin überall da, wo bei einer endlichen Summe der letzte Term nicht angeschrieben ist; insbesondere also auch bei (71.).

Hieraus berechnen sich der Reihe nach die Größen

$$b_{r-e}^{(\nu)}, b_{r-e-1}^{(\nu)}, \ldots b_2^{(\nu)}, b_1^{(\nu)}.$$

Wenn man dann auch die Koeffizienten von $D_{\nu+r-1}, D_{\nu+r-2}, \ldots D_{\nu+r-e}$ auf beiden Seiten von (69.) einander gleichsetzt, ergibt sich:

$$(71.) \qquad \begin{aligned} & c_1^{(\nu+r-e)} + b_1^{(\nu)} = a_1^{(\nu)}, \\ & c_2^{(\nu+r-e)} + b_1^{(\nu)} c_1^{(\nu+r-e-1)} + b_2^{(\nu)} = a_2^{(\nu)}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & c_e^{(\nu+r-e)} + b_1^{(\nu)} c_{e-1}^{(\nu+r-e-1)} + b_2^{(\nu)} c_{e-2}^{(\nu+r-e-2)} + \cdots = a_e^{(\nu)}, \end{aligned}$$

woraus man, da die $b_i^{(\nu)}$ bereits bekannt sind, sukzessive die Größen

$$c_1^{(\nu+r-e)}, c_2^{(\nu+r-e)}, \ldots c_e^{(\nu+r-e)}$$

findet. Weitere Gleichungen liefert die Identität (69.) nicht mehr. Soll diese daher für $\nu \geqq N$ bestehen, so bleiben die $e(r-e)$ Zahlen

$$(72.) \qquad c_k^{(N+i)} \qquad (i=0, 1, \ldots r-e-1;\ k=1, 2, \ldots e)$$

ganz willkürlich bis auf die Einschränkung $c_e^{(N+i)} \neq 0$. Die folgenden $c_k^{(\nu)}$, sowie die $b_i^{(\nu)}$ lassen sich dann eindeutig berechnen, so lange bei dem angegebenen Rekursionsverfahren die neugefundenen $c_e^{(\nu)}$ von Null verschieden bleiben. Wir werden späterhin die Zahl N und die Zahlen (72.) derart wählen können, daß diese Forderung unbeschränkt erfüllt bleibt, wie weit man den Prozeß auch führt*).

---

*) Man könnte glauben, daß das a priori evident ist, indem man mittels des angegebenen Verfahrens die Größen

$$c_e^{(N+r-e)}, c_e^{(N+r-e+1)}, c_e^{(N+r-e+2)}, \ldots$$

zunächst *rein formal* durch die Größen (72.) ausdrückt; sie werden offenbar rationale Funktionen von diesen. Ihr Nichtverschwinden läuft dann darauf hinaus, daß die Zahlen (72.) einer abzählbaren Menge von algebraischen Gleichungen nicht genügen dürfen, was ja stets erreicht werden kann. Dieser Schluß ist aber deshalb nicht richtig, weil unter den gedachten algebraischen Gleichungen auch *identische* sein können, deren Nichterfülltsein daher unmöglich ist. Sei z. B. für einen bestimmten Wert von ν

Nun sei

$$a_i^{(\nu)} = a_i + \varkappa_i^{(\nu)}, \qquad (i=1,2,\dots r) \tag{73.}$$

$$b_i^{(\nu)} = b_i + \varepsilon_i^{(\nu)}, \qquad (i=1,2,\dots r-e) \tag{74.}$$

$$c_k^{(\nu)} = c_k + \delta_k^{(\nu)}, \qquad (k=1,2,\dots e) \tag{75.}$$

wobei b_i, c_k die bei Formulierung von Hilfssatz III angegebene Bedeutung haben, so daß

$$f(x) = \varphi(x)\,\omega(x) \tag{76.}$$

ist, wenn wieder zur Abkürzung

$$\begin{aligned} &x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_r = f(x), \\ &x^{r-e} + b_1 x^{r-e-1} + \dots + b_{r-e} = \varphi(x), \\ &x^e + c_1 x^{e-1} + \dots + c_e = \omega(x) \end{aligned} \tag{77.}$$

$$a_r^{(\nu)} = 0,\ a_{r-1}^{(\nu)} = 0, \dots a_e^{(\nu)} = 0. \tag{A}$$

Wenn dann zwar

$$c_e^{(\nu)} \neq 0,\ c_e^{(\nu+1)} \neq 0, \dots c_e^{(\nu+r-e-1)} \neq 0$$

ist, so folgt aus (70.):

$$b_{r-e}^{(\nu)} = 0,\ b_{r-e-1}^{(\nu)} = 0, \dots b_1^{(\nu)} = 0,$$

und daher aus der letzten Gleichung des Systems (71.):

$$c_e^{(\nu+r-e)} = 0.$$

Wenn wir trotzdem späterhin die willkürlichen Elemente (72.) so werden wählen können, daß dauernd $c_e^{(\nu)} \neq 0$ bleibt, so erklärt sich dies daraus, daß die Gleichungen (A) nicht für unendlich viele Werte von ν bestehen können, so daß bei geeigneter Wahl von N diese Schwierigkeit von selbst für $\nu \geqq N$ wegfällt. In der Tat, wenn die Gleichungen (A) für unendlichviele ν-Werte bestehen würden, so müßte wegen (2.) auch

$$a_r = 0,\ a_{r-1} = 0, \dots a_e = 0$$

sein. Die charakteristische Gleichung hätte also höchstens $e-1$ von Null verschiedene Wurzeln, und man könnte folglich nicht, wie es doch in Hilfssatz III vorausgesetzt wird, einen Faktor $\omega(x)$ vom e-ten Grad abspalten, dessen sämtliche Wurzeln absolut größer als die andern, also a fortiori von Null verschieden sind.

gesetzt wird. Außerdem ist auch wieder

$$\lim_{\nu=\infty} \varkappa_i^{(\nu)} = 0 \qquad (i=1,2,\ldots r) \tag{78.}$$

und, da die Wurzeln von $\omega(x)$ absolut größer als die von $\varphi(x)$, folglich von Null verschieden sind:

$$c_e \neq 0. \tag{79.}$$

Aus der Identität (76.) folgt, indem man beiderseits die Koeffizienten von $1, x, \ldots x^{r-e-1}$ gleichsetzt, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &b_{r-e}c_e = a_r, \\ &b_{r-e-1}c_e + b_{r-e}c_{e-1} = a_{r-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_1 c_e + b_2 c_{e-1} + b_3 c_{e-2} + \cdots = a_{e+1}, \end{aligned} \tag{80.}$$

welches sich von dem System (70.) nur durch das Fehlen der oberen Indizes unterscheidet.

Wir wollen jetzt an Stelle der unbekannten Koeffizienten $b_i^{(\nu)}, c_k^{(\nu)}$ überall die durch (74.) und (75.) definierten neuen Unbekannten $\varepsilon_i^{(\nu)}, \delta_k^{(\nu)}$ einführen. Macht man dies speziell bei jeder der Gleichungen (70.) und subtrahiert dann die jeweils entsprechende des Systems (80.) davon, so erhält man:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{r-e}^{(\nu)}(c_e + \delta_2^{(\nu)}) = \varkappa_r^{(\nu)} - b_{r-e}\delta_e^{(\nu)}, \\ &\varepsilon_{r-e-1}^{(\nu)}(c_e + \delta_e^{(\nu+1)}) + \varepsilon_{r-e}^{(\nu)}(c_{e-1} + \delta_{e-1}^{(\nu)}) = \varkappa_{r-1}^{(\nu)} - b_{r-e-1}\delta_e^{(\nu+1)} - b_{r-e}\delta_{e-1}^{(\nu)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varepsilon_1^{(\nu)}(c_e + \delta_e^{(\nu+r-e-1)}) + \varepsilon_2^{(\nu)}(c_{e-1} + \delta_{e-1}^{(\nu+r-e-2)}) + \cdots \\ &\qquad = \varkappa_{e+1}^{(\nu)} - b_1\delta_e^{(\nu+r-e-1)} - b_2\delta_{e-1}^{(\nu+r-e-2)} - \cdots. \end{aligned} \tag{81.}$$

Statt das gleiche Verfahren auch auf das System (71.) anzuwenden, wollen wir die Werte aus (73.) bis (75.) lieber gleich in die Identität

$$\begin{aligned}
&x^r + a_1^{(\nu)} x^{r-1} + \cdots + a_r^{(\nu)} \\
&= x^r + c_1^{(\nu+r-e)} x^{r-1} + \cdots + c_e^{(\nu+r-e)} x^{r-e} \\
&+ b_1^{(\nu)} (x^{r-1} + c_1^{(\nu+r-e-1)} x^{r-2} + \cdots + c_e^{(\nu+r-e-1)} x^{r-e-1}) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ b_{r-e}^{(\nu)} (x^e + c_1^{(\nu)} x^{e-1} + \cdots + c_e^{(\nu)})
\end{aligned}$$

einführen, die ja offenbar genau soviel besagt wie (69.), also wie (70.) und (71.) zusammengenommen. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
f(x) + \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i^{(\nu)} x^{r-i} &= \sum_{i=0}^{r-e} b_i^{(\nu)} \left\{ x^{r-e-i} \omega(x) + \sum_{k=1}^{e} \delta_k^{(\nu+r-e-i)} x^{r-i-k} \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{r-e} b_i^{(\nu)} x^{r-e-i} \omega(x) + \sum_{i=0}^{r-e} b_i^{(\nu)} \sum_{k=1}^{e} \delta_k^{(\nu+r-e-i)} x^{r-i-k} \\
&= \left(\varphi(x) + \sum_{i=1}^{r-e} \varepsilon_i^{(\nu)} x^{r-e-i} \right) \omega(x) + \sum_{i=0}^{r-e} b_i^{(\nu)} x^{r-e-i} \sum_{k=1}^{e} \delta_k^{(\nu+r-e-i)} x^{e-k},
\end{aligned}$$

wobei $b_0^{(\nu)} = 1$ zu setzen ist. Führt man noch die Abkürzung

$$\text{(82.)} \qquad \sum_{k=1}^{e} \delta_k^{(\nu)} x^{e-k} = \Phi_{\nu,0}(x)$$

ein und berücksichtigt, daß $f(x) = \varphi(x)\omega(x)$ ist, so kommt:

$$\sum_{i=1}^{r} \varkappa_i^{(\nu)} x^{r-i} = \omega(x) \sum_{i=1}^{r-e} \varepsilon_i^{(\nu)} x^{r-e-i} + \sum_{i=0}^{r-e} b_i^{(\nu)} x^{r-e-i} \Phi_{\nu+r-e-i,0}(x).$$

Diese Identität differenzieren wir λ-mal nach x und setzen dabei:

$$\text{(83.)} \qquad \sum_{k=1}^{e} \binom{e-k}{\lambda} \delta_k^{(\nu)} x^{e-k-\lambda} = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \Phi_{\nu,0}(x) = \Phi_{\nu,\lambda}(x).$$

Man erhält dann, wenn man noch durch $\lambda!$ dividiert:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} \binom{r-i}{\lambda} \varkappa_i^{(\nu)} x^{r-i-\lambda} &= \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \left\{ \omega(x) \sum_{i=1}^{r-e} \varepsilon_i^{(\nu)} x^{r-e-i} \right\} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{r-e} b_i^{(\nu)} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{r-e-i}{\mu} x^{r-e-i-\mu} \Phi_{\nu+r-e-i,\lambda-\mu}(x).
\end{aligned}$$

Bedeutet daher τ eine mindestens $(\lambda+1)$-fache Wurzel von $\omega(x)$, so folgt aus dieser Gleichung, wenn man speziell $x=\tau$ setzt und dann noch durch τ^{r-e} dividiert,

$$\sum_{i=1}^{r}\binom{r-i}{\lambda}\varkappa_i^{(\nu)}\tau^{e-i-\lambda}=\sum_{\mu=0}^{\lambda}\sum_{i=0}^{r-e}b_i^{(\nu)}\binom{r-e-i}{\mu}\tau^{-i-\mu}\Phi_{\nu+r-e-i,\,\lambda-\mu}\,,$$

wobei das Argument τ bei Φ unterdrückt ist, wie das in der Folge stets geschehen soll. Wenn man hier bei der Summation nach μ den Term für $\mu=0$ isoliert und $b_i^{(\nu)}$ durch $b_i+\varepsilon_i^{(\nu)}$ ersetzt $(b_0=1,\ \varepsilon_0^{(\nu)}=0)$, so kommt schließlich:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{r-e}\frac{b_i}{\tau^i}\Phi_{\nu+r-e-i,\,\lambda}\\ &=-\sum_{i=1}^{r-e}\frac{\varepsilon_i^{(\nu)}}{\tau^i}\Phi_{\nu+r-e-i,\,\lambda}+\sum_{i=1}^{r}\binom{r-i}{\lambda}\varkappa_i^{(\nu)}\tau^{e-i-\lambda}\\ &\quad-\sum_{\mu=1}^{\lambda}\sum_{i=0}^{r-e}(b_i+\varepsilon_i^{(\nu)})\binom{r-e-i}{\mu}\tau^{-i-\mu}\Phi_{\nu+r-e-i,\,\lambda-\mu}\,,\end{aligned}\tag{84.}$$

wobei im Falle $\lambda=0$ die Doppelsumme auf der rechten Seite einfach wegzufallen hat. Bei dieser Entwicklung mußte τ eine mindestens $(\lambda+1)$-fache Wurzel von $\omega(x)$ sein. Wenn also τ genau eine j-fache Wurzel ist, so werden wir die Gleichung (84.) für die Werte $\lambda=0, 1, \ldots j-1$ in Anspruch nehmen können. *Sonach repräsentiert Gleichung* (84.) *in Wahrheit genau e verschiedene Gleichungen, entsprechend den verschiedenen Wurzeln τ von $\omega(x)$ und ihrer Multiplizität.* Diese e Gleichungen sind, wie sich aus ihrer Herleitung ergibt, gewisse lineare Verbindungen der Gleichungen (70.) und (71.)*).

Wenn man in der Definitionsgleichung für $\Phi_{\nu,\lambda}=\Phi_{\nu,\lambda}(\tau)$ (siehe (83.))

$$\sum_{k=1}^{e}\binom{e-k}{\lambda}\tau^{e-k-\lambda}\delta_k^{(\nu)}=\Phi_{\nu,\lambda}(\tau)\tag{85.}$$

wiederum τ und λ die obigen Werte annehmen läßt, so repräsentiert (85.) ebenfalls e Gleichungen. Nun ist von größter Wichtigkeit, daß diese sich

*) Sie sind mit (70.) zusammengenommen sogar vollkommen äquivalent mit dem vereinigten Gleichungssystem (70.) und (71.).

nach $\delta_1^{(\nu)}, \delta_2^{(\nu)}, \ldots \delta_e^{(\nu)}$ auflösen lassen, da ihre Determinante von Null verschieden ist*). Die Auflösung sei

$$\delta_k^{(\nu)} = \sum_{\tau,\lambda} \chi_{k,\lambda}(\tau)\, \Phi_{\nu,\lambda}(\tau), \qquad (k=1,2,\ldots e)$$

wo sich die Summation auf die mehrfach erwähnten Werte von τ und λ zu erstrecken hat, und wo die e^2 Koeffizienten $\chi_{k,\lambda}(\tau)$ ganz bestimmte von ν nicht abhängende Zahlen sind. Bezeichnet man den größten ihrer absoluten Beträge mit G, so erhält man die für alle ν gültige Ungleichung:

$$|\delta_k^{(\nu)}| \leqq G \sum_{\tau,\lambda} |\Phi_{\nu,\lambda}(\tau)|. \qquad (k=1,2,\ldots e) \tag{86.}$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{r-e}$ die Wurzeln von $\varphi(x)$, so daß nach den Voraussetzungen des Hilfssatzes III

$$|\sigma_i| < |\tau| \tag{87.}$$

ist, und führen neben den Größen $\Phi_{\nu,\lambda} = \Phi_{\nu,\lambda}(\tau)$ noch die folgenden ein:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\nu+1,\lambda} - \frac{\sigma_1}{\tau}\Phi_{\nu,\lambda} = \Phi^{(1)}_{\nu+1,\lambda}, \\
&\Phi^{(1)}_{\nu+1,\lambda} - \frac{\sigma_2}{\tau}\Phi^{(1)}_{\nu,\lambda} = \Phi^{(2)}_{\nu+1,\lambda}, \qquad (88.) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\Phi^{(r-e-1)}_{\nu+1,\lambda} - \frac{\sigma_{r-e}}{\tau}\Phi^{(r-e-1)}_{\nu,\lambda} = \Phi^{(r-e)}_{\nu+1,\lambda}.
\end{aligned}$$

---

*) Sind $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_d$ die voneinander verschiedenen Wurzeln von $\omega(x)$, und ist allgemein τ_i eine j_i-fache, so ist die Determinante nämlich gleich dem Differenzenprodukt

$$\prod_{i<k} (\tau_i - \tau_k)^{j_i j_k}.$$

Aus der Auflösbarkeit der Gleichungen (85.) ergibt sich sofort die in der vorigen Fußnote behauptete Äquivalenz. Denn durch (84.) werden die Größen $\Phi_{\nu+r-e,\lambda}(\tau)$ ausgedrückt durch solche Φ, deren erster Index kleiner ist. Man kann dann eben wegen der Auflösbarkeit auch die Größen

$$\delta_1^{\nu(+r-e)}, \ \delta_2^{(\nu+r-e)}, \ldots \ \delta_e^{(\nu+r-e)}$$

Dann drückt sich offenbar allgemein $\Phi^{(i)}_{\nu+i,\lambda}$ linear aus durch $\Phi_{\nu,\lambda}, \Phi_{\nu+1,\lambda}, \dots \Phi_{\nu+i,\lambda}$, also nach der Definitionsgleichung (85.) auch durch die Größen

$$\delta^{(\nu)}_k, \delta^{(\nu+1)}_k, \dots \delta^{(\nu+i)}_k. \qquad (k=1, 2, \dots e)$$

Für $i=r-e$ ist speziell (vergl. die analoge Entwicklung bei den Gleichungen (50.) bis (51ª.)):

$$(89.) \quad \Phi^{(\nu-e)}_{\nu+r-e,\lambda} = \Phi_{\nu+r-e,\lambda} + \frac{b_1}{\tau}\Phi_{\nu+r-e-1,\lambda} + \frac{b_2}{\tau^2}\Phi_{\nu+r-e-2,\lambda} + \dots + \frac{b_{r-e}}{\tau^{r-e}}\Phi_{\nu,\lambda}.$$

Der Gleichförmigkeit halber werden wir statt $\Phi_{\nu,\lambda}$ gelegentlich auch $\Phi^{(0)}_{\nu,\lambda}$ schreiben; dann kommt, indem man die $r-e-i$ letzten der Gleichungen (88.) zueinander addiert:

$$(90.) \quad \Phi^{(i)}_{\nu+1,\lambda} = \frac{\sigma_{i+1}}{\tau}\Phi^{(i)}_{\nu,\lambda} + \frac{\sigma_{i+2}}{\tau}\Phi^{(i+1)}_{\nu,\lambda} + \dots + \frac{\sigma_{r-e}}{\tau}\Phi^{(r-e-1)}_{\nu,\lambda} + \Phi^{(r-e)}_{\nu+1,\lambda}. \qquad (i=0, 1, \dots r-e-1)$$

Unser nächstes Ziel ist nun, zu beweisen, daß man gewisse positive Zahlen

$$\varkappa, \delta, \eta^{(i)}_\lambda$$

angeben kann von der Beschaffenheit, daß die Ungleichungen

$$(91.) \quad |\varkappa^{(\nu)}_1| < \varkappa, \quad |\varkappa^{(\nu)}_2| < \varkappa, \quad \dots |\varkappa^{(\nu)}_r| < \varkappa,$$

$$(92.) \quad |\delta^{(\nu)}_k| < \delta, \quad |\delta^{(\nu+1)}_k| < \delta, \quad \dots |\delta^{(\nu+r-e-1)}_k| < \delta, \qquad (k=1, 2, \dots e)$$

$$(93.) \quad |\Phi^{(i)}_{\nu,\lambda}| < \eta^{(i)}_\lambda, |\Phi^{(i)}_{\nu+1,\lambda}| < \eta^{(i)}_\lambda, \dots |\Phi^{(i)}_{\nu+r-e-1,\lambda}| < \eta^{(i)}_\lambda \qquad (i=0, 1, \dots r-e-1)$$

die folgenden nach sich ziehen

$$|\delta^{(\nu+r-e)}_k| < \theta\delta, \qquad (k=1, 2, \dots e)$$

$$|\Phi^{(i)}_{\nu+r-e,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda, \qquad (i=0, 1, \dots r-e-1)$$

---

durch derartige Φ, also schließlich durch δ mit kleinerem oberen Index ausdrücken. Dann ist aber ganz das gleiche geleistet wie früher durch das System (71.).

wo θ eine geeignet zu wählende Zahl kleiner als 1 ist. Dabei sind die Voraussetzungen (93.) so zu verstehen, daß sie für jede Wurzel τ von $\omega(x)$ gelten sollen, und zwar bei einer j-fachen Wurzel τ wieder für die Werte $\lambda = 0, 1, \ldots j-1$. Die Ungleichung

$$|\Phi^{(i)}_{\nu+k,\lambda}| < \eta^{(i)}_{\lambda}, \text{ d. i. } |\Phi^{(i)}_{\nu+k,\lambda}(\tau)| < \eta^{(i)}_{\lambda}$$

repräsentiert also bei festem k und i in Wahrheit immer noch genau e Ungleichungen entsprechend den verschiedenen Wurzeln von $\omega(x)$ und ihrer Multiplizität.

Ich will hier gleich von vornherein diejenigen Zahlen

$$\theta, \varkappa, \delta, \eta^{(i)}_{\lambda}$$

angeben, welche das Verlangte leisten, und dann den entsprechenden Nachweis führen. Wegen (87.) kann man eine Zahl q und eine Zahl $\theta < 1$ finden, derart, daß die Ungleichungen

$$|\sigma_i| < q < \theta |\tau| \tag{94.}$$

für alle Wurzeln σ_i von $\varphi(x)$ und für alle Wurzeln τ von $\omega(x)$ erfüllt sind. Hierdurch ist zunächst θ fixiert. Weiter definieren wir eine positive Zahl h durch die Gleichung

$$h = \frac{1}{2}\theta \prod_{i=1}^{r-e}\left(1-\frac{|\sigma_i|}{q}\right). \tag{95.}$$

Wenn nun die Zahlen $\varkappa, \delta$ in (91.), (92.) hinreichend klein gewählt sind, so lehren die Gleichungen (81.), weil ja $c_e \neq 0$ ist, der Reihe nach, daß auch die absoluten Werte von

$$\varepsilon^{(\nu)}_{r-e}, \quad \varepsilon^{(\nu)}_{r-e-1}, \ldots \varepsilon^{(\nu)}_{2}, \varepsilon^{(\nu)}_{1}$$

unter einer vorgegebenen Grenze liegen werden; dazu ist jedenfalls auch

$$\delta < |c_e| \tag{96.}$$

anzunehmen. Insbesondere können wir also $\varkappa$, δ auch derart wählen, daß aus (91.), (92.) sogleich

$$|\varepsilon_1^{(\nu)}|<h,\ |\varepsilon_2^{(\nu)}|<h,\ \ldots\ |\varepsilon_{r-e}^{(\nu)}|<h,$$

$$\sum_{i=1}^{r-e}\left|\frac{\varepsilon_i^{(\nu)}}{\tau^i}\right|<h$$

folgt für jede Wurzel τ von $\omega(x)$; und diese Bedingung bleibt erst recht erfüllt, wenn wir nachträglich $\varkappa$ und δ noch verkleinern. Bezeichnet man also mit G wieder die in (86.) eingeführte Zahl, ferner mit K eine Zahl, die den $2e$ Ungleichungen

$$(97.)\qquad \begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}\binom{r-i}{\lambda}|\tau|^{e-i-\lambda}<K,\\ &\sum_{i=0}^{r-e}(|b_i|+h)\binom{r-e-i}{\lambda}|\tau|^{-i-\lambda}<K\end{aligned}$$

genügt, wo τ, λ wieder die mehrfach erwähnten Werte annehmen, so wird man insbesondere die Zahl $\varkappa$ noch so weit verkleinern können, daß die Ungleichung

$$(98.)\qquad \varkappa<\frac{\delta}{eG\left(\frac{K+h}{h}\right)^e}$$

besteht.

Man wähle nun $\varkappa$, δ irgendwie den verlangten Bedingungen gemäß, und setze außerdem:

$$(99.)\qquad \begin{aligned}\eta_\lambda^{(0)}&=\varkappa\left(\frac{K+h}{h}\right)^{\lambda+1},\\ \eta_\lambda^{(1)}&=\left(1-\frac{|\sigma_1|}{q}\right)\eta_\lambda^{(0)},\\ \eta_\lambda^{(2)}&=\left(1-\frac{|\sigma_2|}{q}\right)\eta_\lambda^{(1)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \eta_\lambda^{(r-e)}&=\left(1-\frac{|\sigma_{r-e}|}{q}\right)\eta_\lambda^{(r-e-1)}.\end{aligned}$$

Von den hiermit definierten Zahlen θ, $\varkappa$, δ, $\eta_\lambda^{(i)}$ will ich nun zeigen, daß sie das oben Verlangte leisten. Übrigens kommen die Zahlen $\eta_\lambda^{(i)}$ in dem zu beweisenden Satz nur für $i<r-e$ vor; beim Beweise werden aber auch die vorstehend eingeführten Größen $\eta_\lambda^{(r-e)}$ gute Dienste leisten. Für die Folge ist wichtig zu bemerken, daß die Zahlen $\varkappa$, δ, $\eta_\lambda^{(i)}$ alle geforderten Eigenschaften behalten, wenn man sie proportional verkleinert. Weiter seien zunächst drei einfache Folgerungen aus (99.) hervorgehoben. Aus der ersten dieser Gleichungen fließen unmittelbar die folgenden:

$$(100.)\qquad \begin{aligned} &K\varkappa = h\,(\eta_0^{(0)}-\varkappa) < h\,\eta_0^{(0)},\\ &K\,(\varkappa+\eta_0^{(0)}+\eta_1^{(0)}+\cdots+\eta_{\lambda-1}^{(0)}) = h\,(\eta_\lambda^{(0)}-\varkappa) < h\,\eta_\lambda^{(0)}. \end{aligned}$$

Ferner, wenn man die $r-e-i$ letzten der Gleichungen (99.) zueinander addiert:

$$(101.)\quad \eta_\lambda^{(i)} = \frac{|\sigma_{i+1}|}{q}\eta_\lambda^{(i)} + \frac{|\sigma_{i+2}|}{q}\eta_\lambda^{(i+1)} + \cdots + \frac{|\sigma_{r-e}|}{q}\eta_\lambda^{(r-e-1)} + \eta_\lambda^{(r-e)}. \quad {\scriptstyle (i=0,1,\ldots r-e-1)}$$

Multipliziert man endlich noch die $r-e$ letzten der Gleichungen (99.) miteinander, so kommt:

$$\eta_\lambda^{(r-e)} = \eta_\lambda^{(0)} \prod_{i=1}^{r-e}\Big(1-\frac{|\sigma_i|}{q}\Big),$$

also auch nach (95.):

$$(102.)\qquad \theta\,\eta_\lambda^{(r-e)} = 2h\,\eta_\lambda^{(0)}.$$

Um nun den verlangten Nachweis zu führen, setzen wir also für einen bestimmten Index ν das Bestehen der Ungleichungen (91.), (92.), (93.) voraus. Man erhält dann aus Gleichung (84.):

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=0}^{r-e}\frac{b_i}{\tau^i}\Phi_{\nu+r-e-i,\lambda}\Big| &\leqq \sum_{i=1}^{r-e}\Big|\frac{\varepsilon_i^{(\nu)}}{\tau^i}\Big|\eta_\lambda^{(0)} + \sum_{i=1}^{r}\binom{r-i}{\lambda}|\tau|^{e-i-\lambda}\varkappa\\ &+ \sum_{\mu=1}^{\lambda}\Big\{\sum_{i=0}^{r-e}(|b_i|+|\varepsilon_i^{(\nu)}|)\binom{r-e-i}{\mu}|\tau|^{-\mu-i}\Big\}\,\mathrm{Max}\,(\eta_{\lambda-\mu}^{(0)}, |\Phi_{\nu+r-e,\lambda-\mu}^{(0)}|). \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung können wir aber nach (89.) ersetzen durch $|\Phi^{(r-e)}_{\nu+r-e,\lambda}|$. Auf der rechten Seite berücksichtigen wir die Ungleichungen (97.), sowie den Umstand, daß bei unserer Wahl der Zahlen $\varkappa, \delta$ notwendig

$$|\varepsilon_i^{(\nu)}| < h, \quad \sum_{i=1}^{r-e} \left|\frac{\varepsilon_i^{(\nu)}}{\tau^i}\right| < h$$

wird. Man erhält dann:

$$(103.)\quad |\Phi^{(r-e)}_{\nu+r-e,\lambda}| < h\eta^{(0)}_\lambda + K\varkappa + \sum_{\mu=1}^{\lambda} K \operatorname{Max}(\eta^{(0)}_{\lambda-\mu}, |\Phi^{(0)}_{\nu+r-e,\lambda-\mu}|).$$

Setzt man jetzt in (90.) $\nu+r-e-1$ an Stelle von ν und ersetzt rechts alle Glieder durch ihren absoluten Betrag, so kommt:

$$|\Phi^{(i)}_{\nu+r-e,\lambda}| \leqq \left|\frac{\sigma_{i+1}}{\tau}\right| |\Phi^{(i)}_{\nu+r-e-1,\lambda}| + \cdots + \left|\frac{\sigma_{r-e}}{\tau}\right| |\Phi^{(r-e-1)}_{\nu+r-e-1,\lambda}| + |\Phi^{(r-e)}_{\nu+r-e,\lambda}|. \qquad (i=0,1,\ldots r-e-1)$$

Also a fortiori wegen (93.), (94.), (103.):

$$|\Phi^{(i)}_{\nu+r-e,\lambda}| < \theta\frac{|\sigma_{i+1}|}{q}\eta^{(i)}_\lambda + \theta\frac{|\sigma_{i+2}|}{q}\eta^{(i+1)}_\lambda + \cdots + \theta\frac{|\sigma_{r-e}|}{q}\eta^{(r-e-1)}_\lambda + h\eta^{(0)}_\lambda + K\varkappa + K\sum_{\mu=1}^{\lambda} \operatorname{Max}(\eta^{(0)}_{\lambda-\mu}, |\Phi^{(0)}_{\nu+r-e,\lambda-\mu}|).$$

Mit Rücksicht auf (101.) besagt dies aber:

$$|\Phi^{(i)}_{\nu+r-e,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda - \theta\eta^{(r-e)}_\lambda + h\eta^{(0)}_\lambda + K\varkappa + K\sum_{\mu=1}^{\lambda} \operatorname{Max}(\eta^{(0)}_{\lambda-\mu}, |\Phi^{(0)}_{\nu+r-e,\lambda-\mu}|),$$

und daher endlich wegen (102.):

$$(104.)\quad |\Phi^{(i)}_{\nu+r-e,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda - h\eta^{(0)}_\lambda + K\varkappa + K\sum_{\mu=1}^{\lambda} \operatorname{Max}(\eta^{(0)}_{\lambda-\mu}, |\Phi^{(0)}_{\nu+r-e,\lambda-\mu}|). \qquad (i=0,1,\ldots r-e-1)$$

Diese Ungleichung geht speziell für $\lambda=0$, weil dann die Summe auf der rechten Seite wegfällt, über in:

$$|\Phi^{(i)}_{\nu+r-e,0}| < \theta\eta_0^{(i)} - h\eta_0^{(0)} + Kz$$
$$< \theta\eta_0^{(i)} \quad \text{(wegen (100.))}.$$

Insbesondere ist also

$$|\Phi^{(0)}_{\nu+r-e,0}| < \theta\eta_0^{(0)}.$$

Mit Berücksichtigung dieses Resultates folgt dann weiter aus (104.), wenn man $\lambda=1$ setzt,

$$|\Phi^{(i)}_{\nu+r-e,1}| < \theta\eta_1^{(i)} - h\eta_1^{(0)} + K(z+\eta_0^{(0)})$$
$$< \theta\eta_1^{(i)} \quad \text{(wegen (100.))};$$

speziell für $i=0$:

$$|\Phi^{(0)}_{\nu+r-e,1}| < \theta\eta_1^{(0)}.$$

Nun folgt wieder aus (104.), indem man $\lambda=2$ setzt und das soeben erhaltene Resultat berücksichtigt,

$$|\Phi^{(i)}_{\nu+r-e,2}| < \theta\eta_2^{(i)} - h\eta_2^{(0)} + K(z+\eta_0^{(0)}+\eta_1^{(0)})$$
$$< \theta\eta_2^{(i)} \text{ (wegen (100.))};$$

speziell für $i=0$:

$$|\Phi^{(0)}_{\nu+r-e,2}| < \theta\eta_2^{(0)}.$$

Jetzt setze man in (104.) $\lambda=3$; so fortschließend findet man dann offenbar allgemein:

(105.) $$|\Phi^{(i)}_{\nu+r-e,\lambda}| < \theta\eta_\lambda^{(i)}; \qquad (i=0,1,\ldots r-e-1)$$

insbesondere für $i=0$ (indem $\Phi^{(0)}_{\nu,\lambda}=\Phi_{\nu,\lambda}$ war):

$$|\Phi_{\nu+r-e,\lambda}| < \theta\eta_\lambda^{(0)} = \theta z\left(\frac{K+h}{h}\right)^{\lambda+1} \leqq \theta z\left(\frac{K+h}{h}\right)^{e},$$

letzteres, weil ja $\lambda+1$ höchstens gleich der Multiplizität einer Wurzel von $\omega(x)$, also höchstens gleich dem Grade e von $\omega(x)$ sein kann. Mit Rücksicht

hierauf folgt nun aus (86.), wenn man dort $\nu+r-e$ an Stelle von ν setzt,

$$|\delta_k^{(\nu+r-e)}| < G\sum_{\tau,\lambda}|\Phi_{\nu+r-e,\lambda}| < Ge\theta\varkappa\left(\frac{K+h}{h}\right)^e; \qquad (k=1,2,\dots e)$$

also wegen (98.) auch

$$|\delta_k^{(\nu+r-e)}| < \theta\delta. \qquad (k=1,2,\dots e) \tag{106.}$$

Die Ungleichungen (105.) und (106.) sind nun gerade diejenigen, welche wir beweisen wollten, so daß die Zahlen $\theta, \varkappa, \delta, \eta_\lambda^{(i)}$ in der Tat die behaupteten Eigenschaften haben.

Nunmehr bietet der Beweis von Hilfssatz III keine Schwierigkeiten mehr. Da die Zahlen $x_i^{(\nu)}$ mit wachsendem ν gegen Null konvergieren, so gibt es eine Zahl N derart, daß für $\nu \geqq N$

$$|x_1^{(\nu)}| < \varkappa, \quad |x_2^{(\nu)}| < \varkappa, \quad \dots \quad |x_r^{(\nu)}| < \varkappa \qquad (\nu \geqq N) \tag{107.}$$

wird. Es läßt sich dann zeigen, daß für $\nu \geqq N$ die Identität (69.) hergestellt werden kann. Dabei bleiben, wie zu Beginn dieses Paragraphen erörtert wurde, die Größen

$$c_k^{(N)}, \quad c_k^{(N+1)}, \quad \dots \; c_k^{(N+r-e-1)}, \qquad (k=1,2,\dots e)$$

also auch

$$\delta_k^{(N)}, \quad \delta_k^{(N+1)}, \quad \dots \quad \delta_k^{(N+r-e-1)} \qquad (k=1,2,\dots e) \tag{108.}$$

zunächst willkürlich. Wir wählen diese letzteren nun derart, daß erstens die Ungleichungen

$$|\delta_k^{(N)}| < \delta, \quad |\delta_k^{(N+1)}| < \delta, \quad \dots \quad |\delta_k^{(N+r-e-1)}| < \delta \qquad (k=1,2,\dots e) \tag{109.}$$

bestehen, und daß zweitens die Zahlen

$$\Phi_{N,\lambda}^{(i)}, \quad \Phi_{N+1,\lambda}^{(i)}, \quad \dots \quad \Phi_{N+r-e-1,\lambda}^{(i)}, \qquad (i=0,1,\dots r-e-1)$$

welche ja lineare homogene Funktionen der Größen (108.) sind, den Bedingungen genügen:

$$(110.) \qquad |\Phi^{(i)}_{N,\lambda}| < \eta^{(i)}_\lambda, \quad |\Phi^{(i)}_{N+1,\lambda}| < \eta^{(i)}_\lambda, \quad \dots \quad |\Phi^{(i)}_{N+r-e-1,\lambda}| < \eta^{(i)}_\lambda.$$

Daraus folgt dann nach obigem:

$$|\delta^{(N+r-e)}_k| < \theta\delta < \delta, \qquad (k=1, 2, \dots e)$$

$$|\Phi^{(i)}_{N+r-e,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda < \eta^{(i)}_\lambda, \qquad (i=0, 1, \dots r-e-1)$$

und dies besagt, daß die Ungleichungen (109.) und (110.) bestehen bleiben, wenn man darin N ersetzt durch $N+1$. Da gleiches aber auch von (107.) gilt, so folgt dann ebenso:

$$|\delta^{(N+1+r-e)}_k| < \theta\delta < \delta, \qquad (k=1, 2, \dots e)$$

$$|\Phi^{(i)}_{N+1+r-e,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda < \eta^{(i)}_\lambda. \qquad (i=0, 1, \dots r-e-1)$$

Daher bleiben die Ungleichungen (109.) und (110.) auch noch bestehen, wenn man N ersetzt durch $N+2$, und daraus folgt dann:

$$|\delta^{(N+2+r-e)}_k| < \theta\delta < \delta, \qquad (k=1, 2, \dots e)$$

$$|\Phi^{(i)}_{N+2+r-e,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda < \eta^{(i)}_\lambda. \qquad (i=0, 1, \dots r-e-1)$$

So fortschließend erkennt man, daß ganz allgemein die Ungleichungen

$$|\delta^{(\nu)}_k| < \theta\delta, \quad |\Phi^{(i)}_{\nu,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda$$

für $\nu \geqq N+r-e$ bestehen. Für hinreichend große ν ist daher

$$|\delta^{(\nu)}_k| < \theta\delta, \quad |\delta^{(\nu+1)}_k| < \theta\delta, \quad \dots \quad |\delta^{(\nu+r-e-1)}_k| < \theta\delta, \qquad (k=1, 2, \dots e)$$

$$|\Phi^{(i)}_{\nu,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda, \quad |\Phi^{(i)}_{\nu+1,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda, \quad \dots \quad |\Phi^{(i)}_{\nu+r-e-1,\lambda}| < \theta\eta^{(i)}_\lambda, \qquad (i=0, 1, \dots r-e-1)$$

und wegen (78.) offenbar auch, indem man ν nötigenfalls noch größer denkt,

$$|\varkappa^{(\nu)}_1| < \theta\varkappa, \quad |\varkappa^{(\nu)}_2| < \theta\varkappa, \quad \dots \quad |\varkappa^{(\nu)}_r| < \theta\varkappa.$$

Diese Ungleichungen unterscheiden sich aber von (91.), (92.), (93.) nur

dadurch, daß die Zahlen $\varkappa$, δ, $\eta_\lambda^{(i)}$ ersetzt sind durch $\theta\varkappa$, $\theta\delta$, $\theta\eta_\lambda^{(i)}$, also proportional verkleinert sind. Wie bereits erwähnt, werden aber dadurch ihre wesentlichen Eigenschaften, und folglich die darauf gegründeten Schlüsse in keiner Weise alteriert; man wird daher jetzt schließen können:

$$|\delta_k^{(\nu+r-e)}| < \theta \cdot \theta\delta = \theta^2\delta, \qquad (k=1,2,\dots e)$$

$$|\Phi_{\nu+r-e,\lambda}^{(i)}| < \theta \cdot \theta\eta_\lambda^{(i)} = \theta^2\eta_\lambda^{(i)}, \qquad (i=0,1,\dots r-e-1)$$

und diese Ungleichungen bleiben erst recht wieder bei Vergrößerung von ν erhalten. Für hinreichend große Werte von ν werden daher die Ungleichungen (91.), (92.), (93.) sich auch derart verschärft einstellen, daß $\theta^2\varkappa$, $\theta^2\delta$, $\theta^2\eta_\lambda^{(i)}$ an Stelle von $\varkappa$, δ, $\eta_\lambda^{(i)}$ tritt. Dann folgt aber analog

$$|\delta_k^{(\nu+r-e)}| < \theta \cdot \theta^2\delta = \theta^3\delta, \qquad (k=1,2,\dots e)$$

$$|\Phi_{\nu+r-e,\lambda}^{(i)}| < \theta \cdot \theta^2\eta_\lambda^{(i)} = \theta^3\eta_\lambda^{(i)}. \qquad (i=0,1,\dots r-e-1)$$

So fortschließend erkennt man, daß, wenn n eine beliebig große Zahl ist, doch schließlich von einem gewissen ν-Wert ab die Ungleichungen

$$|\delta_k^{(\nu)}| < \theta^n\delta \qquad (k=1,2,\dots e)$$

bestehen werden. Wegen $\theta<1$ folgt hieraus:

$$\lim_{\nu=\infty} \delta_1^{(\nu)} = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \delta_2^{(\nu)} = 0, \dots \lim_{\nu=\infty} \delta_e^{(\nu)} = 0,$$

und sodann aus (81.) der Reihe nach:

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_{r-e}^{(\nu)} = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_{r-e-1}^{(\nu)} = 0, \dots \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_1^{(\nu)} = 0.$$

Statt dessen kann man aber nach (74.), (75.) schreiben:

$$\lim_{\nu=\infty} c_1^{(\nu)} = c_1, \ \lim_{\nu=\infty} c_2^{(\nu)} = c_2, \ \dots \ \lim_{\nu=\infty} c_e^{(\nu)} = c_e;$$

$$\lim_{\nu=\infty} b_1^{(\nu)} = b_1, \ \lim_{\nu=\infty} b_2^{(\nu)} = b_2, \dots \ \lim_{\nu=\infty} b_{r-e}^{(\nu)} = b_{r-e}.$$

Hiermit ist nun Hilfssatz III vollständig bewiesen; denn daß $c_\varepsilon^{(\nu)}$ für alle $\nu(\geqq N)$ von Null verschieden ausfällt, folgt sogleich aus

$$|c_\varepsilon^{(\nu)}| = |c_\varepsilon + \delta_\varepsilon^{(\nu)}| \geqq |c_\varepsilon| - |\delta_\varepsilon^{(\nu)}| > |c_\varepsilon| - \delta > 0.$$

§ 7.

Anwendungen.

Bekanntlich ist der Konvergenzradius ϱ einer Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) \equiv D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots$$

gegeben durch die Formel

$$\varrho = \frac{1}{\limsup \sqrt[\nu]{|D_\nu|}}.$$

Wenn also ihre Koeffizienten D_ν der Differenzengleichung (1.) genügen, so lehrt der Zusatz auf S. 20, daß der Konvergenzradius, sofern die Reihe nicht etwa abbricht, gleich einer der Zahlen

$$\text{(111.)} \qquad \frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \cdots \frac{1}{q_\sigma}$$

ist, wo wieder $q_1, \ldots q_\sigma$ die verschiedenen absoluten Beträge der Wurzeln der charakteristischen Gleichung bedeuten. Die Differenzengleichung läßt die r Anfangskoeffizienten der Reihe willkürlich, und von der Wahl dieser Anfangskoeffizienten wird es abhängen, welcher unter den als möglich erkannten Werten der wahre Konvergenzradius ist. Wenn $\frac{1}{q_\lambda}$ eine beliebige der Zahlen (111.) bedeutet, so kann man auch fragen, ob und auf wie viele linear unabhängige Arten sich die Anfangskoeffizienten so bestimmen lassen, daß der Konvergenzradius gerade gleich $\frac{1}{q_\lambda}$ wird. Hierauf gibt unser Fundamentalsatz ohne weiteres die folgende Antwort:

Ist der letzte Koeffizient der Differenzengleichung für alle ν von Null verschieden und hat die charakteristische Gleichung e_λ Wurzeln vom absoluten Betrage q_λ, so gibt es r linear unabhängige Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_{1,1}(x),\ \mathfrak{P}_{1,2}(x),\ \dots\ \mathfrak{P}_{1,e_1}(x),$$
$$\mathfrak{P}_{2,1}(x),\ \mathfrak{P}_{2,2}(x),\ \dots\ \mathfrak{P}_{2,e_2}(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathfrak{P}_{\sigma,1}(x),\ \mathfrak{P}_{\sigma,2}(x),\ \dots\ \mathfrak{P}_{\sigma,e_\sigma}(x),$$

deren Koeffizienten der Differenzengleichung genügen und die derart in σ Klassen (Zeilen des obigen Schemas) zerfallen, daß die e_λ Reihen der λ-ten Klasse und deren lineare Verbindungen den Konvergenzradius $\frac{1}{q_\lambda}$ haben.

Jede Potenzreihe, deren Koeffizienten der Differenzengleichung genügen, läßt sich offenbar in die Form setzen:

$$\mathfrak{P}(x)=\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{k=1}^{e_i} c_{ik}\,\mathfrak{P}_{ik}(x).$$

Ordnet man die q wieder in der Reihenfolge

$$q_1>q_2>\dots>q_\sigma,$$

so ist dabei der Konvergenzradius offenbar gleich $\frac{1}{q_\lambda}$, wenn die Koeffizienten c_{ik} zwar für $i<\lambda$ alle verschwinden, aber nicht mehr für $i=\lambda$. Die Potenzreihen mit dem Konvergenzradius $\frac{1}{q_\lambda}$ bilden also eine $(e_\lambda+e_{\lambda+1}+\dots+e_\sigma)$-gliedrige lineare Schar; insbesondere bilden die mit dem größtmöglichen Konvergenzradius $\frac{1}{q_\sigma}$ eine e_σ-gliedrige Schar.

Zum Schluß wollen wir noch aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen den folgenden Satz beweisen, zu dem ich kürzlich auch auf anderem Wege gelangt bin*):

Sind die Koeffizienten einer linearen homogenen Differentialgleichung m-ter Ordnung Polynome und ist der Koeffizient der höchsten Ableitung speziell vom s-ten Grade, so sind mindestens $m-s$ linear unabhängige Integrale im Endlichen überall analytisch, also ganze Funktionen.

Die Differentialgleichung sei

$$(112.)\qquad P_0(x)y+P_1(x)\frac{dy}{dx}+\dots+P_m(x)\frac{d^my}{dx^m}=0,$$

*) Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Erscheint demnächst in den Acta Mathematica Bd. 33.

wo allgemein das Polynom $P_i(x)$ vom Grade s_i sein möge ($s_m = s$); ist $P_i(x)$ identisch Null, so setzen wir $s_i = -\infty$. Dann bezeichnen wir die größte der $m+1$ Zahlen

$$s_0+m,\ s_1+m-1,\ s_2+m-2,\ldots s_{m-1}+1,\ s_m$$

mit r, so daß unter den Polynomen

$$x^m P_0(x), x^{m-1} P_1(x), \ldots x P_{m-1}(x),\ P_m(x)$$

mindestens eines vom r-ten Grade, aber keines von höherem Grade ist. Setzt man demgemäß

$$x^{m-i} P_i(x) = c_{i0} + c_{i1} x + c_{i2} x^2 + \cdots + c_{ir} x^r, \qquad (i=0,1,\ldots m)$$

so wird erstens

$$c_{i,k} = 0 \text{ für } i+k < m; \tag{113.}$$

zweitens ist mindestens eine der Zahlen

$$c_{0,r},\ c_{1,r},\ \ldots c_{m,r} \tag{114.}$$

von Null verschieden; drittens geht die Differentialgleichung nach Multiplikation mit x^m über in

$$\sum_{i=0}^{m} x^i (c_{i,0} + c_{i,1} x + c_{i,2} x^2 + \cdots + c_{i,r} x^r) \frac{d^i y}{dx^i} = 0. \tag{115.}$$

Wir studieren jetzt die Integrale in der Umgebung einer regulären Stelle, welche wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in den Nullpunkt legen können; es ist dann $P_m(0) \neq 0$, also

$$c_{m,0} \neq 0. \tag{116.}$$

Setzt man die Reihe

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu \tag{117.}$$

in die Differentialgleichung (115.) ein, so erhält man für die Koeffizienten D_ν die Rekursionsformeln:

$$
\begin{aligned}
&D_m f_0(m) + D_{m-1} f_1(m-1) + \cdots = 0\,,^*)\\
&D_{m+1} f_0(m+1) + D_m f_1(m) + \cdots = 0\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&D_{\nu+r} f_0(\nu+r) + D_{\nu+r-1} f_1(\nu+r-1) + \cdots + D_\nu f_r(\nu) = 0\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{118.}
$$

wobei abkürzend

$$
c_{0,h} + c_{1,h}\varrho + c_{2,h}\varrho(\varrho-1) + \cdots + c_{m,h}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-m+1) = f_h(\varrho)
\tag{119.}
$$

gesetzt ist. Speziell wird wegen (113.):

$$
f_0(\varrho) \doteq c_{m,0}\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-m+1).
$$

Da also wegen (116.) $f_0(\varrho) \not\equiv 0$ ist für $\varrho \geqq m$, so bleiben durch die Forderungen (118.) die m Anfangskoeffizienten $D_0, D_1, \ldots D_{m-1}$ willkürlich; alle folgenden sind dann eindeutig bestimmt. Die Frage ist, ob man die willkürlichen Koeffizienten so bestimmen kann, daß die Reihe (117.) beständig konvergiert.

Nun ist das Polynom $f_r(\nu)$, da die Zahlen (114.) nicht alle verschwinden, jedenfalls nicht identisch Null, und folglich für genügend große ν, etwa für $\nu \geqq N$, sicher von Null verschieden. Wir teilen dann die Gleichungen (118.) in zwei Klassen; in die erste Klasse nehmen wir die $N+r-m$ ersten dieser Gleichungen auf:

$$
\begin{aligned}
&D_m f_0(m) + D_{m-1} f_1(m-1) + \cdots = 0\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&D_{N+r-1} f_0(N+r-1) + D_{N+r-2} f_1(N+r-2) + \cdots + D_{N-1} f_r(N-1) = 0.
\end{aligned}
\tag{120.}
$$

In die zweite Klasse nehmen wir alle folgenden; diese haben nach Division durch den höchsten Koeffizienten die Gestalt:

---

*) Links stehen $r+1$ oder $m+1$ Terme, je nachdem $r \leqq m$ oder $r \geqq m$ ist; der letzte Term ist dann $D_{m-r} f_r(m-r)$ oder $D_0 f_m(0)$. Analoges gilt von der folgenden Gleichung.

$$(121.) \qquad D_{\nu+r}+\frac{f_1(\nu+r-1)}{f_0(\nu+r)}D_{\nu+r-1}+\cdots+\frac{f_r(\nu)}{f_0(\nu+r)}D_\nu=0. \quad (\nu=N, N+1, N+2, \ldots)$$

Offenbar haben wir in (121.) eine Differenzengleichung von der besonderen Art vor uns, wie wir sie seither studierten; ihre charakteristische Gleichung ist

$$(122.) \qquad x^r+\frac{c_{m,1}}{c_{m,0}}x^{r-1}+\frac{c_{m,2}}{c_{m,0}}x^{r-2}+\cdots+\frac{c_{m,r}}{c_{m,0}}=0,$$

und ihr letzter Koeffizient ist für alle ν von Null verschieden. Nun ist aber das Polynom $P_m(x)$ vom s-ten Grade; also ist unter den Zahlen

$$c_{m,0},\ c_{m,1},\ldots\ c_{m,r}$$

$c_{m,s}$ die letzte von Null verschiedene. Die charakteristische Gleichung hat daher $(r-s)$-mal die Wurzel $x=0$; folglich hat nach dem Fundamentalsatz die Gleichung (121.) $r-s$ linear unabhängige Integrale, für welche

$$\lim_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{|D_\nu|}=0$$

wird; es sind das die ausgezeichneten Integrale. Deren $(r-s)$-gliedrige Schar kann offenbar charakterisiert werden durch s linear unabhängige Gleichungen zwischen den Anfangswerten $D_N,\ D_{N+1},\ldots\ D_{N+r-1}$:

$$(123.) \qquad \gamma_{i,0}D_N+\gamma_{i,1}D_{N+1}+\cdots+\gamma_{i,r-1}D_{N+r-1}=0. \qquad (i=1,2,\ldots s)$$

Die Gleichungen (120.) und (123.) zusammengenommen sind ein System von $N+r-m+s$ linearen homogenen Gleichungen für die $N+r$ Unbekannten

$$D_0,\ D_1,\ldots\ D_{N+r-1}.$$

Sie haben daher mindestens $m-s$ linear unabhängige Lösungen. Zu jeder dieser Lösungen kann man die folgenden D_ν aus (121.) berechnen und erhält dadurch in der Tat mindestens $m-s$ linear unabhängige Reihen der Form

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}D_\nu x^\nu,$$

welche die Differentialgleichung befriedigen und für welche zugleich

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} = 0,$$

also der Konvergenzradius unendlich groß ist. W. z. b. w.

Bemerkenswert ist der Fall $r=s$. Da dann die Anzahl der Gleichungen (123.) gleich r ist, so besagen sie soviel wie

$$D_N=0,\ D_{N+1}=0 \ldots .\ D_{N+r-1}=0.$$

Dann ist nach (121.) überhaupt

$$D_\nu=0 \text{ für } \nu \geqq N.$$

Jede ganze Funktion, welche die Differentialgleichung befriedigt, ist daher notwendig ein Polynom. Damit haben wir ein sehr bekanntes Resultat bestätigt. Denn nach der Definition der Zahl r wird dann und nur dann $r=s$ sein, wenn die Differentialgleichung die Gestalt

$$P_m(x)\frac{d^m y}{dx^m}+P_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+P_0(x)\,y=0$$

hat, wo allgemein der Grad von $P_{m-i}(x)$ um mindestens i Einheiten geringer ist als der von $P_m(x)$. Bekanntlich ist aber bei einer solchen Gleichung der Punkt ∞ eine Stelle der Bestimmtheit; also kann kein Integral der Form

$$y=\Sigma D_\nu x^\nu$$

mit unendlich vielen positiven Potenzen von x existieren.

Zum System eines linearen Komplexes und einer Fläche 2. Ordnung.

Von Herrn *R. Weitzenböck* in Linz a. D.

Inhaltsübersicht:

1. Einleitung, die Symbolik. — 2. Das Formensystem. — 3. Der polare Komplex Ω. — 4. Flächen T_x^2, S_x^2. — 5. Formen Φ und Ψ, Schnittkurve M. — 6. Die P-Verwandtschaft, Doppelpunkte. — 7. Spezialfälle.

1.

Das Nachstehende ist ein Beitrag zur Theorie der quaternären Formen. Die behandelten Formen ergeben sich bei Zugrundelegung eines Systems bestehend aus einer Fläche zweiter Ordnung und einem linearen Strahlenkomplexe. Insbesondere wird das vollständige Formensystem dieses Systems aufgestellt, und es werden einige geometrische Betrachtungen an der Hand des Formensystems analytisch durchgeführt, speziell die Bestimmung der 4 Geraden des Komplexes, welche Erzeugende der Fläche sind.

Das in Rede stehende System findet man ziemlich ausführlich behandelt in dem Werke: *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie, II. Bd. Kapitel XVI.

In dieser Arbeit ist die Schreibart durchweg symbolisch. Bezüglich dieser Darstellungsart der Linienkoordinaten verweise ich auf mein Buch: Komplex-Symbolik, Sammlung Schubert LVII, 1908. Zur Erleichterung des Lesens will ich kurz das Wichtigste hierüber erläutern.

Eine Fläche 2. Ordnung R_x^2 wird im R_3 symbolisch durch

$$a_x'^2 = 0$$

in homogenen Punktkoordinaten x_i dargestellt; hierbei ist $a_x' = a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 + a_4' x_4$ und $a_i' a_k' = a_k' a_i'$ geben einen wirklichen Zahlkoeffizienten $a_{ik}' = a_{ki}'$. Die a_i' sind hierbei „gewöhnliche" Symbole. Gilt bei Symbolen m_i' die Gleichung

$$m_i' m_x' = -m_x' m_i', \text{ oder in Zahlen}$$
$$m_{ix}' = -m_{xi}', \text{ und folglich } m_{ii}' = 0,$$

so heißen die m_i' „Komplexsymbole", und diese eignen sich zur Darstellung der Linienkoordinaten im R_3. Es gilt für solche, wie leicht abzuleiten

$$m_x' m_y' = -m_y' m_x',$$
$$m_x'^2 \equiv 0.$$

Indem wir setzen

$$p_{12} = p_{34}', \quad p_{13} = p_{42}', \quad p_{14} = p_{23}' \text{ etc.},$$

ist der Zusammenhang zwischen Punktkoordinaten $p_{ix} = (xy)_{ix}$ und Ebenenkoordinaten $p_{ix}' = (u'v')_{ix}$ einer Geraden hergestellt, und es wird überdies nur ein einziger Buchstabe hierbei gebraucht. Variable Geraden bezeichnen wir gewöhnlich mit den Symbolen π oder ϱ. So ist z. B., wenn m_i' Komplexsymbole sind, durch

$$\pi_{m'}^2 = (\pi_1 m_1' + \pi_2 m_2' + \pi_3 m_3' + \pi_4 m_4')^2$$
$$= 2 \Sigma \pi_{ix} m_{ix} = 0$$

ein linearer Komplex dargestellt. Es ist hierbei immer $\pi_{m'}^2 \equiv \pi_m'^2$. Ist $m_{n'}^2 = 0$, wo n mit m gleichbedeutend ist, so ist der obige Komplex speziell und die m_{ix} sind die Koordinaten seiner Achse.

Für Komplexsymbole gilt zum Umformen von Ausdrücken die Identität

$$q_{p'} q_{u'} p_x' \equiv -p_{q'} p_{u'} q_x' + \frac{1}{2} p_{q'}^2 u_x'.$$

Ist hierin p mit q vertauschbar, so folgt

$$q_{p'}\, q_{w'}\, p'_x \equiv \frac{1}{4}\, p_{q'}^2\, u'_x.$$

2.

Das vollständige Formensystem des hier betrachteten Systems, bestehend aus einer Fläche 2. Ordnung R und einem linearen Strahlenkomplexe K_m setzt sich aus folgenden Formen zusammen:

Typus	Symbolischer Ausdruck	Geometrische Bedeutung, wenn $=0$ gesetzt
Invarianten	$A \equiv (a'\,b'\,c'\,d')^2 \equiv a_a'^2$	Diskriminante der Fläche R, für $A=0$ degeneriert R
	$B \equiv m_{a'}\, m_{b'}\, n_{a'}\, n_{b'}$	Komplex K liegt zu R „harmonisch“
	$C \equiv m_{n'}^2$	für $C=0$ ist der Komplex K speziell
Kovarianten	$R_x^2 \equiv a_x'^2$	Fläche R in Punktkoordinaten
	$T_x^2 \equiv m_x' n_x' m_a' n_a'$	Ort der Punkte x, deren Nullebenen R berühren
Kontravarianten	$R_{u'}^2 \equiv (a'\,b'\,c'\,u')^2 \equiv u_a'^2$	Fläche R in Ebenenkoordinaten
	$\Sigma_{u'}^2 \equiv m_{u'}\, n_{u'}\, m_{a'}\, n_{a'}$	Ort der Ebenen, deren Nullpunkte bezügl. K auf R liegen
Strahlformen	$K_m \equiv \pi_{m'}^2 \equiv \pi_m'^2$	Komplex K
	$R_{\pi^2}^2 \equiv \pi_{a'}\, \pi_{b'}\, \varrho_{a'}\, \varrho_{b'}$	Fläche R in Linienkoordinaten
	$\Omega \equiv \pi_{a'}\, \pi_{b'}\, m_{a'}\, m_{b'}$	Polare Abbildung von K bezügl. R

Aus der Theorie der quaternären Formen seien kurz zwei Sätze erwähnt, welche man zur Umformung von Ausdrücken braucht.

Wir setzen prinzipiell der Kürze wegen

(1.) $$(u'\,a'\,b'\,c') = u'_a.$$

Dann ist

(2.) $$u'_a\, a'_a\, a'_x = \frac{A}{4}\, u'_x, \text{ wo } A = (a'\,b'\,c'\,d')^2 \text{ ist.}$$

Ferner haben wir für die Komplexsymbole m_i bezw. m'_x die Identität

$$(3.) \qquad m_{n'}\, m_{u'} n'_x = \frac{1}{4} m_{n'}^2 u'_x = \frac{C}{4} u'_x.$$

Hierbei ist m mit n gleichbedeutend. Sind die m_{iz} Koordinaten einer Geraden, so verschwindet jeder Ausdruck mit dem Faktor $m_{n'}$ identisch.

Ist die Fläche R als Fläche 2. Klasse

$$u_\alpha'^2 = 0$$

gegeben, so lassen sich obigen Formen folgende Bildungen anreihen, welche wir gleich durch die Grundformen ausdrücken:

$$(4.) \qquad R_{\pi'}^2 \equiv \pi'_\alpha \pi'_\beta \varrho'_\alpha \varrho'_\beta = \frac{3}{2} A\, R_{\pi^2}^2,$$

$$(5.) \qquad R_x'^2 \equiv (x\,\alpha\beta\gamma)^2 = \frac{9}{4} A^2 R_x^2,$$

$$(6.) \qquad A' \equiv (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)^2 = \frac{9}{4} A^3.$$

Ersetzen wir in (4.) die π und ϱ durch m und n, so wird

$$(7.) \qquad B' \equiv m'_\alpha n'_\alpha m'_\beta n'_\beta = \frac{3}{2} AB.$$

3.

Die Polaren der Linien des Komplexes K_m bilden den Komplex Ω. Wir setzen nun

$$(8.) \qquad \Omega = \pi_{a'}\, \pi_{b'}\, m_{a'}\, m_{b'} = \pi_{\varphi'}^2 = \pi_{\psi'}^2$$

und suchen die Leitlinien Γ_1 und Γ_2 der durch K_m und Ω bestimmten linearen Kongruenz. Sie sind gegeben durch

$$(9.) \qquad \Gamma_i \equiv K_m + \lambda_i \Omega = 0,$$

wobei λ_i eine Wurzel folgender Gleichung ist:

$$(10.) \qquad m_{n'}^2 + 2\lambda m_{\varphi'}^2 + \lambda^2 \varphi_{\psi'}^2 = 0.$$

Aus (8.) haben wir:

$$(11.) \qquad 2\varphi'_{ix} = (a'b')_{ix} m_{a'} m_{b'},$$

und demzufolge erhalten wir für die in (10.) auftretenden Formen

$$(12.) \qquad \begin{aligned} m_{n'}^2 &= C, \\ n_{\varphi'}^2 &= 2\Sigma m_{ix} \varphi'_{iz} = m_{a'} m_{b'} n_{a'} n_{b'} = B, \\ \varphi_{\psi'}^2 &= 2\Sigma \varphi_{ix} \varphi'_{ix} = \Sigma \varphi'_{ix} (a'b')_{iz} m_{a'} m_{b'} \\ &= \frac{1}{2} (a'b'c'd') m_{a'} m_{b'} n_{c'} n_{d'} \\ &= \frac{A}{48} (m^2 n^2), \end{aligned}$$

$$(13.) \qquad \varphi_{\psi'}^2 = \frac{A}{24} C.$$

Statt (10.) haben wir also

$$(14.) \qquad C + 2B\lambda + \frac{AC}{24} \lambda^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$(15.) \qquad \lambda_{1,2} = \frac{24}{AC} \left(-B \pm \sqrt{B^2 - \frac{A}{24} C^2} \right).$$

Wir setzen vorläufig voraus, daß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen sowie keine der Invarianten A, B und C verschwindet. Γ_1 schneidet dann R in zwei Punkten P_1 und P_2, ebenso Γ_2 in Q_1 und Q_2. Man zeigt leicht, daß Γ_1 die Polare von Γ_2 ist und umgekehrt. Die vier Linien $P_i Q_x$ gehören dann dem Komplexe K_m an (da sie Γ_1 und Γ_2 schneiden) und sind gleichzeitig Erzeugende von R; wir nennen sie daher „Komplexerzeugende".

Aus (13.) ersieht man, daß Ω nur dann speziell ist, wenn A oder C gleich Null ist, d. h. R muß entweder degenerieren oder K_m muß speziell

sein. Ω ist die duale Abbildung von K_m im Polarsystem von R. Die vier Komplexerzeugenden bleiben hierbei unverändert. Wir können aber auch R im Nullsystem des K_m dual abbilden, d. h. zu jedem Punkte P von R die Nullebene E konstruieren. Vorausgesetzt wird, daß $C \gtrless 0$, also K_m nicht speziell ist.

4.

Wir wenden uns nun diesen Abbildungen von R näher zu. Der Nullpunkt P einer Ebene $E\,(u_i')$ bezüglich K_m hat die Koordinaten $m_i m_{u'}$; er liegt auf R für

$$a'_m m_{u'} a'_n n_{u'} = 0,$$

das heißt

$$\Sigma^2_{u'} = 0 \quad \text{(vgl. die Tabelle)} \tag{16.}$$

ist die Fläche 2. Klasse, welche durch diese Abbildung aus R entsteht.

Zu Kovarianten kommt man auf dieselbe Art. Soll nämlich die Nullebene

$$m'_x m'_y = 0$$

eines Punktes y die Fläche R^2_x berühren, so muß die Gleichung bestehen

$$m'_y n'_y m'_\alpha n'_\alpha = 0,$$

das heißt y gehört der Fläche 2. Ordnung

$$T^2_x \equiv m'_x n'_x m'_\alpha n'_\alpha = 0 \text{ an} \quad \text{(vgl. die Tabelle)}. \tag{17.}$$

Es ist klar, daß sich R^2_x und T^2_x in den vier Komplexerzeugenden $P_i Q_\varkappa$ schneiden. Daß T^2_x und $\Sigma^2_{u'}$ dieselbe Fläche 2. Ordnung und Klasse darstellen, zeigt man leicht, indem man die Gleichung von T^2_x (nach (17.)) in Ebenenkoordinaten u' aufsucht. Man findet für $m=n=\varphi=\psi=\mu=\nu$ und $\alpha=\beta=\gamma$:

$$T^2_{u'} = (m'\mu'\varphi'u')\, m'_\alpha (n'\nu'\psi'u')\, n'_\alpha \mu'_\beta \nu'_\beta \varphi'_\gamma \psi'_\gamma, \tag{18.}$$

und hieraus durch eine etwas längere Umformung

$$(19.) \qquad T^2_{u'} = \frac{9}{16} A C^2 \Sigma^2_{u'}.$$

Durch Schiebung über T^2_x ergibt sich hieraus die Diskriminante A_T der Fläche T^2_x:

$$A_T = \frac{2}{16} m_{\mu'} n_{\nu'} m_{a'} n_{a'} \mu'_a \nu'_a A C^2,$$

$$(20.) \qquad A_T = \frac{9}{256} A^2 C^4.$$

Wir suchen nun die Gleichung von T^2_x in Linienkoordinaten. Setzt man für den Augenblick:

$$(21.) \qquad T^2_x = m'_x n'_x m'_a n'_a \equiv \omega'^2_x = \tau'^2_x = \sigma'^2_x,$$

so wird der gesuchte Ausdruck

$$(22.) \qquad T^2_{\pi^2} = \frac{1}{4} (\pi'^2 \omega' \tau') (\varrho'^2 \omega' \tau') = \pi_{\omega'} \pi_{\tau'} \varrho_{\omega'} \varrho_{\tau'},$$

und daraus ergibt sich mit Rücksicht auf (21.):

$$(23.) \qquad 4 T^2_{\pi^2} = (\pi'^2 m' \mu') (\varrho'^2 n' \nu') m'_a n'_a \mu'_\beta \nu'_\beta.$$

Dies gibt nach längerer Umformung

$$(24.) \qquad T^2_{\pi^2} = 9 (B^2 R^2_{\pi^2} - 4 B \Phi + 4 \Psi).$$

Hierbei bedeutet:

$$(25.) \qquad \Phi = \pi_{a'} \varrho_{a'} \pi_{b'} \varrho_{c'} m_{b'} m_{d'} n_{c'} n_{d'}$$

oder

$$(26.) \qquad \Phi = \pi_{a'} \varrho_{a'} \pi_{k'} \varrho_{k'}, \text{ wenn}$$

$$(27.) \qquad k'_{ix} = b'_i c'_x m_{b'} m_{d'} n_{c'} n_{d'}$$

gesetzt wurde; ferner ist

$$\Psi = m_{a'}\, m_{b'}\, n_{a'}\, n_{c'}\, \pi_{b'}\, \varrho_{c'}\, \pi_{c'}\, \varrho_{d'}\, \mu_{f'}\, \mu_{e'}\, \nu_{f'}\, \nu_{d'}\,, \tag{28.}$$

oder wegen (27.):

$$\Psi = \pi_{k'}\, \varrho_{k'}\, \pi_{l'}\, \varrho_{l'}\,, \text{ wo } l' = k'. \tag{29.}$$

Die Formen Φ und Ψ lassen sich durch die in obiger Tabelle stehenden Strahlformen $R^2_{\pi'}$, K_m und Ω ausdrücken, worauf wir weiter unten zu sprechen kommen.

T^2_x läßt sich auf eine andere Kovariante zurückführen, welche wir statt T^2_x in das vollständige Formensystem aufnehmen könnten. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} T^2_x &= m'_a\, n'_a\, m'_x\, n'_x \\ &= (m'\, a'\, b'\, c')\, m'_x\, (n'\, a'\, b'\, c')\, n'_x \\ &= 3\, B\, a'^2_x - 6\, m_{b'}\, m_{c'}\, a'_x\, n_{a'}\, n_{c'}\, b'_x, \end{aligned}$$

$$T^2_x = 3\, B\, R^2_x - 6\, S^2_x, \tag{30.}$$

wobei

$$S^2_x = a'_x\, b'_x\, m_{a'}\, m_{c'}\, n_{b'}\, n_{c'}$$

gesetzt ist. Nach (27.) haben wir auch

$$S^2_x = k'^2_x, \tag{31.}$$

und (29.) zeigt, daß $\Psi = 0$ nichts anderes ist als die Gleichung der Fläche S^2_x in Linienkoordinaten. Es ist aber für die Rechnung einfacher, wenn man T^2_x statt S^2_x in das Formensystem aufnimmt.

$\Sigma^2_{u'} = 0$ ist eine Fläche zweiter Klasse. Die Nullpunkte ihrer Tangentialebenen liegen auf R^2_x. Sie ist mit T^2_x identisch.

5.

Wir wenden uns jetzt den Strahlformen Φ und Ψ näher zu und drücken sie durch die Strahlformen des in der Tabelle gegebenen Formen-

systems aus. Es ist

$$\Phi = \pi_{a'}\pi_{b'}\varrho_{a'}\varrho_{c'}m_{b'}m_{d'}n_{c'}n_{d'}$$

$$= \frac{1}{2}(\pi'^2 a' b')\, c'_n \varrho_{a'}\varrho_{c'} m_{b'} m_{d'} n_{d'},$$

$$\Phi = [(\pi' a' b' c')\pi'_n + \pi_{c'}\pi_{b'} a'_n - \pi_{c'}\pi_{a'} b'_n]\varrho_{a'}\varrho_{c'} m_{b'} m_{d'} n_{d'}.$$

Hier ist das zweite Glied mit $-\Phi$ identisch, das dritte gibt $+BR^2_{\pi^2}$, somit ist

$$2\Phi - BR^2_{\pi^2} = (\pi' a' b' c')\, d'_n n_{\pi'} m_{d'} m_{b'} \varrho_{a'}\varrho_{c'}$$

$$= [(d' a' b' c')\pi'_n - 2(d' r' b' c')\, a'_n + (d' \pi' a' c')\, b'_n]\, \pi'_n m_{d'} m_{b'} \varrho_{a'}\varrho_{c'},$$

(32.) $$4\Phi - 2BR^2_{\pi^2} = A_1 K_m - 2A_2.$$

Hierbei ist:

$$A_1 = \frac{A}{24}(m\varrho m\varrho),$$

(33.) $$A_1 = -\frac{A}{12}K_m.$$

Ferner wird

$$A_2 = (\pi' d' b' c')\pi'_n a'_n m_{d'} m_{b'} \varrho_{a'}\varrho_{c'},$$

$$A_2 = (2\pi_{b'}\pi_{c'} d'_n a'_n + \pi_{d'}\pi_{b'} c'_n a'_n) m_{d'} m_{b'} \varrho_{a'}\varrho_{c'},$$

(34.) $$A_2 = 2\Phi - \Omega^2.$$

Statt (32.) kommt also

$$4\Phi - 2BR^2_{\pi^2} = -\frac{A}{12}K^2_m - 4\Phi + 2\Omega^2,$$

woraus sich ergibt

(35.) $$\Phi = \frac{B}{4}R^2_{\pi^2} - \frac{A}{96}K^2_m + \frac{1}{4}\Omega^2.$$

Auf ähnliche Weise kann man Ψ umformen; man erhält nach einer etwas längeren Rechnung:

(36.) $$\Psi = \frac{AC^2}{16\cdot 24}R^2_{\pi^2} - \frac{AC}{96}K_m\Omega + \frac{B}{4}\Omega^2.$$

Hierdurch sind Φ und Ψ auf unsere Strahlformen der Tabelle zurückgeführt.

Wir suchen jetzt die Gleichung der Schnittkurve 4. Ordnung M von R_x^2 und T_x^2 in Linienkoordinaten. M besteht bekanntlich aus den 4 Komplexerzeugenden $P_i Q_k$*).

Wir setzen wieder nach (21.)

$$T_x^2 = \omega_x' = \tau_x'^2.$$

Es sei durch x und y eine Gerade bestimmt. Sie schneidet R_x^2 und T_x^2 in je zwei Punkten $x_1 x + x_2 y$, wobei sich die entsprechenden Werte von x_1, x_2 aus den bezüglichen Gleichungen

$$(37.) \qquad \begin{cases} x_1^2 a_x'^2 + 2 x_1 x_2 a_x' a_y' + x_2^2 a_y'^2 = 0, \\ x_1^2 \omega_x^2 + 2 x_1 x_2 \omega_x' \omega_y' + x_2^2 \omega_y'^2 = 0 \end{cases}$$

berechnen lassen. Die Invarianten dieser beiden in den x_i quadratischen Formen sind:

$$(38.) \qquad \begin{cases} D_{11} = a_x'^2 b_y'^2 - a_x' a_y' b_x' b_y', \\ D_{22} = \omega_x'^2 \tau_y'^2 - \omega_x' \omega_y' \tau_x' \tau_y', \\ D_{12} = a_x'^2 \omega_y'^2 - 2 a_x' a_y' \omega_x' \omega_y' + \omega_x'^2 a_y'^2. \end{cases}$$

Führen wir die Koordinaten $2p_{ik} = 2q_{ik} = (xy)_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ der Geraden $\overline{xy}$ ein, so erhalten wir

$$(39.) \qquad \begin{cases} D_{11} = 2 p_{a'} p_{b'} q_{a'} q_{b'}, \\ D_{22} = 2 p_{\omega'} p_{\tau'} q_{\omega'} q_{\tau'}, \\ D_{12} = 4 p_{a'} p_{\omega'} q_{a'} q_{\omega'}. \end{cases}$$

Betrachten wir die $p_{ik} = q_{ik}$ als veränderlich, so sind $D_{11} = 0$ und $D_{22} = 0$ die Gleichungen von R_x^2 bzw. T_x^2 in Linienkoordinaten. Der quadra-

*) Vgl. meine Komplexsymbolik, Sammlung Schubert Bd. LVII. S. 14.

tische Komplex $D_{12}=0$ ist der Ort jener Geraden, welche R_x^2 und T_x^2 nach vier harmonisch liegenden Punkten schneiden. Nach (26.) ist dann Φ dieser Komplex bezüglich der Flächen R_x^2 und S_x^2. Aus (38.) und (39.) ergibt sich dann die Bedingung, daß die beiden Gleichungen (37.) eine Wurzel gemein haben:

$$M=4D_{11}D_{22}-D_{12}^2=0. \tag{40.}$$

Dies ist also für variable $p_{ik}=q_{ik}$ die Schnittkurve der beiden Flächen 2. Ordnung als besonderer Komplex 4. Grades.

In unserem Falle haben wir nach (21.)

$$D_{12}=4\pi_{a'}\varrho_{a'}\pi_{m'}\varrho_{m'}m'_a n'_a,$$

oder umgeformt

$$D_{12}=12BR_{\pi^2}^2-24\Phi. \tag{41.}$$

Berücksichtigt man dies sowie die Gleichungen (24.) und (40.), so erhält man:

$$M=24^2(R_{\pi^2}^2\Psi-\Phi^2). \tag{42.}$$

Führen wir hier schließlich noch für Ψ und Φ die Werte aus (36.) und (35.) ein, so wird

$$M=36(R_{\pi^2}^2)^2\left(B^2-\frac{AC^2}{24}\right)+3R_{\pi^2}^2(AK^2-2ACK_m\Omega+24B\Omega^2) \tag{43.}$$
$$-\left(6\Omega^2-\frac{A}{4}K_m^2\right)^2.$$

Hierdurch ist M vollständig durch die Strahlformen des Formensystems ausgedrückt.

6.

Der Pol der Nullebene $m'_x m'_y=0$ von y bezüglich R_x^2 hat die Gleichung

$$P_y^{(1)} = \alpha_{u'}\,\alpha_{m'}\,m'_y = 0\,.$$

Durch dieselbe erscheint jedem Punkte y ein anderer Punkt $P_y^{(1)}$ zugeordnet, welche Zuordnung wir die P-Verwandtschaft und $P_y^{(1)}$ den P-Punkt von y nennen wollen.

Wir können zu $P_y^{(1)}$ wieder den P-Punkt $P^{(1)}P_y^{(1)} = P_y^{(2)}$ suchen und so fort. Durch einfache Umformungen ergibt sich:

$$(45.)\qquad \begin{cases} P_y^{(1)} = P_y^{(1)}, \\ P_y^{(2)} = -\dfrac{3AB}{4}u'_y + \dfrac{3A}{2}Q'_y, \\ P_y^{(3)} = -\dfrac{3AB}{4}P_y^{(1)} + \dfrac{3A^2C}{32}V'_y, \\ P_y^{(4)} = \left(\dfrac{9}{16}A^2B^2 - \dfrac{3}{2\cdot 16^2}\,A^3C\right)u'_y - \dfrac{9A^2B}{8}Q'_y. \end{cases}$$

Hierbei ist gesetzt:

$$(46.)\qquad Q'_y = m_{u'}\,m_{a'}\,n_{b'}\,n_{a'}\,b'_y,$$

$$(47.)\qquad V'_y = m_{u'}\,m_{a'}\,a'_y,$$

und alle weiteren $P_y^{(n)}$ lassen sich durch die vier Formen $u'_y, P_y^{(1)}, V'_y$ und Q'_y ausdrücken. Ist v' die Polarebene von y bezüglich R_x^2, so stellt $V'_y = 0$ den Nullpunkt von v' und $Q'_y = 0$ den Pol von v' bezüglich $\Sigma_{u'}^2 = 0$ dar.

Wenn $P_y^{(1)}$ mit y identisch ist, so ist y Doppelpunkt der P-Verwandtschaft. Es ist dann

$$(48.)\qquad \alpha_{u'}\,\alpha_{m'}\,m'_y = -\lambda\,u'_y.$$

Hieraus ergeben sich für λ vier Werte. Man erhält*):

---

*) Vgl. in meiner Komplexsymbolik die Ausführungen über die Gegenverwandtschaft eines Ebenenkomplexes im R_5, wo der allgemeine Vorgang zur symbolischen Bildung solcher Gleichungen dargestellt ist.

$$\lambda^4 + \frac{3AB}{4}\lambda^2 + \frac{9}{64\cdot 24}A^3C^2 = 0,$$

und also

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{3A}{8}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - \frac{1}{24}AC^2}\right)}^{*)} . \tag{49.}$$

Die vier Doppelpunkte der P-Verwandtschaft sind nichts anderes als die oben erwähnten vier Punkte P_i und Q_k, in welchen sich die vier Komplexerzeugenden schneiden. Wie man aus (48.) leicht ablesen kann, sind sie auch dadurch definiert, daß ihre Nullebene mit ihrer Polarebene bezüglich R_x^2 identisch ist.

Unser betrachtetes System, bestehend aus einer Fläche 2. Ordnung und Klasse und aus einem linearen Komplexe ist ein zu sich selbst duales Gebilde. So stehen insbesondere den obigen vier Doppelpunkten P_1, P_2, Q_1 und Q_2 die vier Ebenen P_1', P_2', Q_1' und Q_2' dual gegenüber, und zwar ist P_i', Q_i' die Tangentialebene von R_x^2 in P_i, Q_k. Es gibt eine elegante Ableitung der Gleichungen dieser Ebenen, die wir nun durchführen wollen.

Es sei ein Punkt y gegeben. Seine Nullebenen bezüglich der Komplexe K_m und Ω sind

$$\begin{cases} E_1 \equiv m_x' m_y' = 0, \\ E_2 \equiv a_x' b_y' m_{a'} m_{b'} = 0. \end{cases} \tag{50.}$$

E_1 und E_2 schneiden sich in der Geraden Γ_y' mit der Gleichung

$$\Gamma_y' \equiv \pi_{m'} \pi_{a'} m_y' b_y' n_{a'} n_{b'} = 0. \tag{51.}$$

Γ_y' ist hierbei jene durch y gehende Gerade, welche die beiden Leitlinien Γ_1 und Γ_2 schneidet (§ 3). Wenn Γ_y' die Fläche R_x^2 berühren soll, so muß Γ_y' dem quadratischen Komplexe R_π^2, oder auch nach (4.) $R_{\pi'}^2$ angehören. Wir nehmen der leichteren Rechnung wegen den letzteren.

---

*) Siehe das in § 1 genannte Werk von *Clebsch-Lindemann.*

Die Bedingung wird dann

$$(52.) \qquad V=(m'a')_{(\alpha\beta)}m'_y b'_y n_{b'} n_{a'} (\mu'c')_{(\alpha\beta)}\mu'_y d'_y \nu_{c'} \nu_{d'} = 0.$$

Hierbei ist μ, ν, n mit m gleichbedeutend und

$$(m'a')_{(\alpha\beta)} = m'_\alpha a'_\beta - m'_\beta a'_\alpha$$

gesetzt. Aus (52.) erhält man durch leichte Umformung, wenn man x statt y schreibt:

$$(53.) \qquad V=\frac{A}{2}T_x^2 S_x^2 - \frac{A^2C^2}{128}(R_x^2)^2,$$

und mit Hilfe von (30.) wird hieraus:

$$(54.) \qquad V_x^4 = -\Big(\frac{A^2C^2}{128}(R_x^2)^2 - \frac{AB}{4}R_x^2 T_x^2 + \frac{A}{12}(T_x^2)^2\Big).$$

Die Punkte g, durch welche also Tangenten von R_x^2 gehen, die der Kongruenz (K_m, Ω) angehören, liegen also auf einer Fläche 4. Ordnung $V_x^4 = 0$. Aus (54.) ersieht man, daß V_x^4 vor allem in zwei Flächen 2. Ordnung $F \equiv \lambda' R_x^2 + \lambda'' T_x^2 = 0$ zerfällt, da das Trinom rechts zerlegbar ist. Diese Flächen F gehören dem durch R_x^2 und T_x^2 bestimmten Büschel an, und jede derselben besteht aus zwei Ebenen, die mit den oben definierten P'_i und Q'_k identisch sind, wie man leicht durch eine einfache geometrische Überlegung nachweist. Aus (54.) ergibt sich weiter, daß die beiden Flächen F zusammenfallen, wenn

$$B^2 - \frac{AC^2}{24}$$

verschwindet. Hierdurch sind wir wieder auf die Diskriminante der Kongruenz (K_m, Ω) geführt. (Vgl. Gleichung (15.) und (49.).)

Die dualen Betrachtungen führen zu den 4 Doppelpunkten. Es sei v' eine Ebene; ihre Nullpunkte bezüglich K_m und Ω werden:

$$(55.) \qquad \begin{cases} N_1 \equiv m_{u'} m_{v'} = 0, \\ N_2 \equiv \alpha_{u'} \beta_{v'} \alpha_{m'} \beta_{m'} = 0. \end{cases}$$

Hierbei ist Ω bei N_2 in der Form $\Omega' \equiv \pi'_\alpha \pi'_\beta m'_\alpha m'_\beta = 0$ angenommen. Nach (4.) ist aber $\Omega' = \frac{3}{2} A \Omega$. (Vgl. auch Gleichung (7.).)

Die Verbindungslinie $N_1 N_2 = I'_{v'}$ ist jene in v' gelegene Gerade, welche die Schnittpunkte von I'_1 und I'_2 mit v' untereinander verbindet; ihre Gleichung wird nach (55.):

$$(56.) \qquad I'_{v'} \equiv \pi'_m \pi_\alpha m_{v'} \beta_{v'} \alpha_{n'} \alpha_{n'} = 0.$$

Sie berührt R_x^2, wenn sie dem Komplexe $R_{n'}^2$ angehört, also für

$$(57.) \qquad W = (a'b')_{(m\alpha)} m_{v'} \beta_{v'} \alpha_{n'} \beta_{n'} (a'b')_{(\mu\gamma)} \mu_{v'} \delta_{v'} \gamma_{v'} \delta_{v'} = 0,$$

und dies gibt nach einer leichten Umformung, wenn wir u' statt v' schreiben:

$$(58.) \qquad W = -\frac{A^2}{32}\left(\frac{C^2}{4}(R_{u'}^2)^2 - 3BR_{u'}^2 \Sigma_{u'}^2 + \frac{3}{8} A (\Sigma_{u'}^2)^2\right).$$

Hieraus ergeben sich analog (54.) die vier Doppelpunkte, welche sich zu 2 Paaren P_1, P_2 und Q_1, Q_2 ordnen lassen, entsprechend den Geraden I'_1 und I'_2.

7.

Das hier behandelte Problem findet bekanntlich bei der Theorie der Transformation einer Fläche 2. Ordnung oder Klasse in sich, und im Zusammenhange damit bei der eines linearen Komplexes in sich, seine ausgiebigste Anwendung*).

Wir wollen hier von den verschiedenen Spezialfällen der gegenseitigen Beziehungen von R_x^2 und K_m nur noch kurz zwei hervorheben.

Wenn die Diskriminante der Kongruenz (K_m, Ω) verschwindet, also für

$$B^2 - \frac{1}{24} A C^2 = 0,$$

*) Vgl. insbesondere das schon oben genannte Werk *Clebsch-Lindemann.*

fallen I_1 und I_2 in eine einzige Gerade I' zusammen, welche dann zu sich selbst konjugiert ist bezüglich R_x^2 und also eine Erzeugende dieser Fläche ist. Aus (15.) folgt dann

$$\lambda = -\frac{C}{B}, \tag{59.}$$

und I' hat also nach (9.) die Gleichung

$$\Gamma \equiv B_m K - C\Omega = 0. \tag{60.}$$

Aus (43.) erhalten wir für diesen Fall

$$M = 36\left(\Omega - \frac{B}{C}K_m\right)^2\left[2BR_{n^2}^2 - \left(\Omega + \frac{3}{C}K_m\right)^2\right] = 0. \tag{61.}$$

Es sondert sich also von M die doppelt zu zählende Komplexerzeugende I' ab. Der restliche Ausdruck

$$2BR_{n^2}^2 - \left(\Omega + \frac{B}{C}K_m\right)^2 = 0 \tag{62.}$$

stellt die beiden andern Komplexerzeugenden dar. Verschwindet auch (62.) identisch, so hat K_m mit R_x^2 eine Schar von Erzeugenden gemeinsam. Dieser Fall kann dann noch einfacher dadurch charakterisiert werden, daß R_x^2 mit T_x^2 identisch wird. Eine weitere Spezialisierung ist bei einem nicht speziellen K_m nicht möglich, denn beide Scharen von Erzeugenden einer nicht degenerierten Fläche R_x^2 können nicht demselben linearen Komplexe angehören.

Als zweiten Spezialfall betrachten wir jenen, bei welchem R_u^2 in einen Kegelschnitt $\varkappa$ degeneriert. Dieser Fall ist wichtig, wenn wir zu metrischen Beziehungen übergehen. Wir denken uns dann $\varkappa$ als den imaginären Kugelkreis des Raumes.

Hierbei müssen wir von der Form R_u^2 ausgehen, da R_x^2 für diesen Fall die doppelt gezählte unendlichferne Ebene ist.

Wir haben also jetzt die beiden Komplexe

$$(63.)\qquad \begin{cases} K_m \equiv \pi_{m'}^2 = 0\,, \\ \Omega' \equiv \pi'_\alpha \pi'_\beta m'_\alpha m'_\beta, \end{cases}$$

wobei $R_{u'}^2 = a_{u'}^2 = 0$ den Kugelkreis darstellt, also die Bedingungen bestehen:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)^2 = 0\,,$$

während $(\alpha\beta\gamma x)^2$ nicht identisch Null ist.

Die drei Invarianten der beiden Komplexe K_m und Ω' sind:

$$(64.)\qquad \begin{cases} A_{11} = C = m_n'^2\,, \\ A_{22} = \frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma\delta)\, m'_\alpha m'_\beta n'_\gamma n'_\delta \equiv 0, \\ A_{12} = m'_\alpha m'_\beta n'_\alpha n'_\beta = B'. \end{cases}$$

Demgemäß wird statt (15.)

$$C + 2\lambda B' = 0\,,$$

also

$$\lambda = -\frac{C}{2B'}\,,$$

und

$$(65.)\qquad \Gamma_0 \equiv 2B' K_m - C\Omega' = 0$$

ist eine Leitlinie der Kongruenz (K_m, Ω'). Nach (64.) ist A_{22}, die Invariante von Ω', gleich Null, Ω' also speziell, $\Omega' = 0$ somit die andere Leitlinie der Kongruenz. Die Gerade Ω' liegt ganz in der unendlichfernen Ebene und ist Polare des unendlichfernen Punktes von Γ_0 bezüglich des Kugelkreises. Die Nullebene jedes Punktes ξ von Γ_0 geht durch Ω' und steht also auf Γ_0 senkrecht. Γ_0 ist somit die „Achse" des Komplexes K_m.

Diese Überlegungen bieten auch Gelegenheit, einen Schritt weiter zu gehen und die Beziehungen einer, durch zwei lineare Komplexe K_1

und K_2 bestimmten Strahlenkongruenz zum Kugelkreise allgemein zu untersuchen, ohne irgendwelche kanonische Formen einzuführen. Ersetzen wir in (65.) den K_m durch $K_1+\lambda K_2$, so erhalten wir

$$(66.) \qquad \begin{aligned} \Gamma_\lambda \equiv 2(B_{11}+2\lambda B_{12}+\lambda^2 B_{22})(K_1+\lambda K_2) \\ -(C_{11}+2\lambda C_{12}+\lambda^2 C_{22})(\Omega_{11}+\lambda\Omega_{22})=0, \end{aligned}$$

wo die Bedeutung der hier auftretenden Formen leicht ersichtlich ist. Die ∞^1 Achsen der Komplexe $K_1+\lambda K_2$ bilden hier eine Menge dritten Grades. Die von ihnen gebildete Linienfläche wird also von einer willkürlichen Geraden in drei Punkten getroffen, sie ist also auch vom 3. Grade und mit dem bekannten Zylindroid identisch.

Analytische Untersuchung singulärer Punkte von Raumkurven.

Von Herrn *Alfred Meder* in Riga.

1. Die vorliegende Abhandlung ist ein Auszug aus einer im Jahre 1908 unter dem gleichen Titel in russischer Sprache erschienenen Arbeit. Es sind hierbei einige Abschnitte unverkürzt wiedergegeben, um die im Original benutzten Methoden klar hervortreten zu lassen, andere wiederum nur ihrem Inhalte nach kurz referiert.

Bekanntlich hat zuerst *v. Staudt* auf die geometrische Unterscheidung der acht Arten von Raumkurvenpunkten aufmerksam gemacht, die sich durch das Verhalten von Punkt, Tangente und Schmiegungsebene an der betreffenden Stelle der Kurve ergibt. Die vorliegende Arbeit setzt sich das Ziel, analytische Kriterien für diese acht Arten von Punkten aufzustellen, sowie auf analytischem Wege das Verhalten von mit der Kurve in Verbindung stehenden Größen und Gebilden, als Krümmung, Torsion, Evolute, Evolvente usw., für diese acht Arten zu untersuchen; dabei werden im Endlichen und im Unendlichen liegende Punkte in gleichem Maße ausführlich behandelt. Wir benutzen, mit *Wiener*, das Zeichen $+$, um ein gewöhnliches, das Zeichen $-$, um ein Rückkehrelement anzudeuten, und bezeichnen diese acht Arten in folgender Weise:

$$\text{I}\,+++,\ \text{II}\,++-,\ \text{III}\,+-+,\ \text{IV}\,+--,$$
$$\text{V}\,-++,\ \text{VI}\,-+-,\ \text{VII}\,--+,\ \text{VIII}\,---.$$

Hierbei bezieht sich das erste Zeichen auf das Verhalten des Punktes, das zweite auf das der Tangente, das dritte auf das der Schmiegungsebene, so

daß z. B. VI $-+-$ einen Rückkehrpunkt mit gewöhnlicher Tangente und Rückkehrschmiegungsebene bezeichnet. Die Art eines Raumkurvenpunktes in dem eben definierten Sinne werden wir auch seinen *Charakter* nennen.

Wir nehmen bei unseren Untersuchungen, soweit sich diese auf im Endlichen gelegene Punkte beziehen, an, daß man auf der betrachteten Kurve ein den zu untersuchenden Punkt in seinem Innern enthaltendes Stück derart abgrenzen kann, daß die Koordinaten der Punkte dieses Stückes sich für ein gewisses Intervall der unabhängigen reellen Variablen t als eindeutige reelle analytische Funktionen dieser Variablen darstellen lassen, so daß für sie die *Taylor*sche Reihenentwicklung gilt. Dann ändern, wenn die Variable t dieses Intervall durchläuft, Punkt, Tangente und Schmiegungsebene der Kurve stetig ihre Lage.

§ 1.

Die Ordnungszahlen gewisser Ausdrücke.

2. Es sei zunächst bemerkt, daß wir es in der ganzen vorliegenden Arbeit nur mit reellen Funktionen eines reellen Argumentes zu tun haben werden und daß dies daher überall stillschweigende Voraussetzung ist. Ferner soll der Wert einer Funktion w der unabhängigen Variablen t an der Stelle $t=t_0$ durch w_0 bezeichnet und der Index 0 nur in diesem Sinne gebraucht werden.

Ist w für ein gewisses die Stelle t_0 einschließendes Intervall von t eine eindeutige analytische Funktion dieser Veränderlichen, die an der Stelle t_0 die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$w_0 = w_0' = \cdots = w_0^{(\alpha-1)} = 0, \quad w_0^{(\alpha)} \neq 0,$$

so heißt bekanntlich α die *Ordnungszahl* der Funktion w an der Stelle t_0. Hat dagegen die Funktion w an der Stelle t_0 einen unendlich großen Wert, derart daß $1:w$ eine in der Umgebung von t_0 eindeutige analytische Funktion von t ist, für welche die Gleichungen

$$\left(\frac{1}{w}\right)_0 = \left(\frac{1}{w}\right)_0' = \cdots = \left(\frac{1}{w}\right)_0^{(\beta-1)} = 0, \quad \left(\frac{1}{w}\right)_0^{(\beta)} \neq 0$$

gelten, so ist an dieser Stelle $-\beta$ die Ordnungszahl der Funktion w. Für die Ordnungszahl einer Funktion w an der Stelle $t=t_0$ führen wir die Bezeichnung

$$\text{Ord } [w]$$

ein*). Der Begriff der Ordnungszahl ist für unsere Arbeit von fundamentaler Bedeutung, da die Lösung der meisten in ihr behandelten Aufgaben darauf herauskommt, zu bestimmen, ob eine gewisse Funktion der unabhängigen Variablen t an der Stelle t_0 gleich Null, endlich und dabei von Null verschieden, oder unendlich groß ist, und ob diese Funktion beim Durchgange von t durch den Wert t_0 ihr Zeichen beibehält oder wechselt. Zur Entscheidung dieser Fragen dient der folgende Satz, der wohl keines näheren Beweises bedarf:

Satz I. Der Zahlenwert einer Funktion w an der Stelle t_0 der unabhängigen Veränderlichen t ist gleich Null, endlich und dabei von Null verschieden, oder unendlich groß, je nachdem die Ordnungszahl der Funktion w an dieser Stelle positiv, Null oder negativ ist. Die Funktion w behält beim Durchgange von t durch den Wert t_0 ihr Zeichen oder wechselt es, je nachdem diese Ordnungszahl gerade oder ungerade ist.

Zur Berechnung der Ordnungszahlen gegebener Funktionen kommen hauptsächlich nachstehende, leicht zu beweisende Sätze in Betracht:

Satz II. Die Ordnungszahl des Produktes mehrerer Funktionen ist gleich der Summe der Ordnungszahlen dieser Funktionen.

Satz III. Die Ordnungszahl des Quotienten zweier Funktionen ist gleich der Differenz zwischen der Ordnungszahl des Zählers und der des Nenners.

Satz IV. Hat eine Funktion an der Stelle t_0 der unabhängigen Veränderlichen t die von Null verschiedene Ordnungszahl c, so hat die ν-te Ableitung dieser Funktion an derselben Stelle die Ordnungszahl $c-\nu$, und

---

*) Da die Entwicklungen der vorliegenden Arbeit sich auch leicht auf gewisse nicht analytische Funktionen ausdehnen lassen, hatte ich im russischen Originaltext für die Ordnungszahl einen neuen Terminus „*Indikator*“ und die Bezeichnung *Ind* eingeführt.

zwar im Falle eines negativen c für alle Werte von ν, im Falle eines positiven c nur für diejenigen, welche nicht größer als c sind.

Wir werden es im folgenden häufig mit Ausdrücken der Form

$$(1.) \qquad w=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_r^2}$$

zu tun haben, in denen $u_1, u_2, \ldots u_r$ für ein gewisses die Stelle t_0 enthaltendes Intervall der Veränderlichen t eindeutige Funktionen dieser Veränderlichen sind, die an der Stelle t_0 bezw. die Ordnungszahlen $a_1, a_2, \ldots a_r$ haben. Von diesen sei keine kleiner als a_i; dann können wir die Funktion w in der Form

$$w=u_i\sqrt{\left(\frac{u_1}{u_i}\right)^2+\left(\frac{u_2}{u_i}\right)^2+\cdots+\left(\frac{u_r}{u_i}\right)^2}$$

schreiben, wobei offenbar der Radikand für $t=t_0$ endlich und von Null verschieden ist. Wir nehmen nun an, wie wir es in ähnlichen Fällen stets tun werden, daß das Vorzeichen der Wurzel für irgend einen dem betrachteten Intervall angehörenden Wert von t irgendwie festgesetzt sei und daß es für die anderen Werte von t gemäß der analytischen Fortsetzung bestimmt werde. Bei einer derartigen Annahme ist die Funktion w, bezw. die Funktion $1:w$, eine eindeutige analytische Funktion in einem gewissen den Punkt t_0 einschließenden Intervalle von t. Treffen wir dagegen, wie es bei geometrischen Größen der Form (1.) häufig geschieht, die Bestimmung, daß die Funktion w nie negativ sein soll, so wird der Differentialquotient a_i-ter Ordnung von w, bezw. $-a_i$-ter Ordnung von $1:w$, an der Stelle t_0 unstetig, indem er sein Zeichen wechselt, ohne durch den Wert 0 hindurchzugehen. Nennen wir, wie man es ja auch in der Funktionentheorie tut, a_i die Ordnungszahl der Funktion w, so gelten offenbar auch für Ordnungszahlen von Funktionen der Gestalt (1.) die Sätze I—IV.

Es empfiehlt sich, der späteren Anwendungen wegen, bei Betrachtung mehrerer Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_r$ für diejenige ihrer Ordnungszahlen, die keine der übrigen übertrifft, eine besondere Bezeichnung einzuführen; wir wählen für dieselbe die Schreibweise

$$\text{Ord}\,[u_1, u_2, \ldots u_r],$$

so daß die Gleichung gilt:

$$\text{Ord}\,[\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_r^2}]=\text{Ord}\,[u_1,u_2,\ldots u_r].$$

3. Es seien die Koordinaten x, y, z der Punkte der betrachteten Kurve für ein gewisses die Stelle $t=t_0$ einschließendes Intervall von t als eindeutige analytische Funktionen dieser Variablen definiert und außerdem, ein für allemal, die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$A=y'z''-y''z',\quad B=z'x''-z''x',\quad C=x'y''-x''y',\quad \Delta=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Es gilt der nachstehende Satz, der sich als Spezialfall von dem Verfasser unter dem Titel: *Über die Determinante von Wronski**) angestellter Entwicklungen ergibt:

Satz V. Es mögen für einen speziellen Wert t_0 der unabhängigen Veränderlichen t die Bedingungen erfüllt sein:

$$\text{Ord}\,[x',y',z']=n,\quad \text{Ord}\,[A,B,C]=m,\quad \text{Ord}\,[\Delta]=p,\quad n\geqq 0\,^{**}).$$

Dann tritt folgendes ein:

1. *Es ist $m\geqq 2n$, $p\geqq 2m-n$.*
2. *Es lassen sich aus den Gleichungen*

$$\begin{aligned} &a_1 y_0^{(n+1)}+b_1 z_0^{(n+1)}=0, \\ &a_2 z_0^{(n+1)}+b_2 x_0^{(n+1)}=0, \\ &a_3 x_0^{(n+1)}+b_3 y_0^{(n+1)}=0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &a x_0^{(n+1)}+b y_0^{(n+1)}+c z_0^{(n+1)}=0, \\ &a x_0^{(m-n+2)}+b y_0^{(m-n+2)}+c z_0^{(m-n+2)}=0 \end{aligned}$$

Größen a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a, b, c bestimmen, von denen weder die sechs ersten, noch die drei letzten sämtlich verschwinden und die die nachstehenden Relationen befriedigen:

---

*) Monatsh. f. Math. u. Phys. XVII, S. 19—43.

**) Die Ungleichung $n\geqq 0$ ist hinzugefügt, weil wir in späteren Abschnitten auch im Unendlichen gelegene Punkte der betrachteten Kurve zu untersuchen haben werden, für welche dies nicht mehr der Fall ist.

$$a_1 y_0' + b_1 z_0' = 0, \qquad a_2 z_0' + b_2 x_0' = 0, \qquad a_3 x_0' + b_3 y_0' = 0,$$

$$a_1 y_0'' + b_1 z_0'' = 0, \qquad a_2 z_0'' + b_2 x_0'' = 0, \qquad a_3 x_0'' + b_3 y_0'' = 0,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_1 y_0^{(m-n+1)} + b_1 z_0^{(m-n+1)} = 0, \quad a_2 z_0^{(m-n+1)} + b_2 x_0^{(m-n+1)} = 0, \quad a_3 x_0^{(m-n+1)} + b_3 y_0^{(m-n+1)} = 0,$$

$$a x_0' + b y_0' + c z_0' = 0,$$

$$a x_0'' + b y_0'' + c z_0'' = 0,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a x_0^{(p-m+2)} + b y_0^{(p-m+2)} + c z_0^{(p-m+2)} = 0,$$

während mindestens eine der drei Ungleichungen

$$a_1 y_0^{(m-n+2)} + b_1 z_0^{(m-n+2)} \neq 0, \quad a_2 z_0^{(m-n+2)} + b_2 x_0^{(m-n+2)} \neq 0, \quad a_3 x_0^{(m-n+2)} + b_3 y_0^{(m-n+2)} \neq 0$$

und sicher die Ungleichung

$$a x_0^{(p-m+3)} + b y_0^{(p-m+3)} + c z_0^{(p-m+3)} \neq 0$$

stattfindet.

3. *Es bestehen die Proportionen:*

$$x_0^{(n+1)} : y_0^{(n+1)} : z_0^{(n+1)} = x_0^{(n+2)} : y_0^{(n+2)} : z_0^{(n+2)} = \ldots = x_0^{(m-n+1)} : y_0^{(m-n+1)} : z_0^{(m-n+1)}$$
$$\neq x_0^{(m-n+2)} : y_0^{(m-n+2)} : z_0^{(m-n+2)},$$

$$A_0^{(m)} : B_0^{(m)} : C_0^{(m)} = A_0^{(m+1)} : B_0^{(m+1)} : C_0^{(m+1)} = \ldots = A_0^{(p-m+n)} : B_0^{(p-m+n)} : C_0^{(p-m+n)}$$
$$\neq A_0^{(p-m+n+1)} : B_0^{(p-m+n+1)} : C_0^{(p-m+n+1)}.$$

4. *In den Matrizen*

$$\left\| \begin{matrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{(m-n+1)} & y_0^{(m-n+1)} & z_0^{(m-n+1)} \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{(p-m+2)} & y_0^{(p-m+2)} & z_0^{(p-m+2)} \end{matrix} \right\|$$

verschwinden alle Determinanten zweiter, bzw. dritter Ordnung, während dies

nicht mehr der Fall ist, wenn man den Matrizen die Zeilen

$$x_0^{(m-n+2)},\ y_0^{(m-n+2)},\ z_0^{(m-n+2)},\ \textit{bezw.}\ x_0^{(p-m+3)},\ y_0^{(p-m+3)},\ z_0^{(p-m+3)}$$

hinzufügt.

4. Wir werden in der vorliegenden Arbeit häufig auf Fragen geführt werden, die auf die Bestimmung der Ordnungszahlen von Ausdrücken der Form

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' \tag{2.}$$

hinauslaufen, in denen α, β, γ konstante nicht gleichzeitig verschwindende Größen bezeichnen.

Es mögen für den betrachteten Punkt die Voraussetzungen

$$\text{Ord}\,[x', y', z'] = n,\quad \text{Ord}\,[A, B, C] = m,\quad \text{Ord}\,[\Delta] = p,\quad n \geqq 0$$

gelten. Der Kürze wegen wollen wir im folgenden einen solchen Punkt durch die Ordnungszahlen n, m, p charakterisiert nennen. An der betrachteten Stelle verschwindet der Ausdruck (2.) nebst seinen $n-1$ ersten Ableitungen, während die n-te Ableitung sich auf das Glied

$$\alpha x_0^{(n+1)} + \beta y_0^{(n+1)} + \gamma z_0^{(n+1)}$$

reduziert, also von Null verschieden sein kann, in welchem Falle die Ordnungszahl des Ausdruckes (2.) den Wert n hätte.

Ist dagegen

$$\alpha x_0^{(n+1)} + \beta y_0^{(n+1)} + \gamma z_0^{(n+1)} = 0, \tag{3.}$$

so verschwinden nach Satz V, 3 auch die folgenden Ableitungen der Funktion (2.) bis zur Ordnung $m-n$ inklusive und es reduziert sich die $(m-n+1)$-te Ableitung auf

$$\alpha x_0^{(m-n+2)} + \beta y_0^{(m-n+2)} + \gamma z_0^{(m-n+2)}, \tag{4.}$$

so daß die Ordnungszahl der Funktion (2.) gleich $m-n+1$ ist, wenn nicht außer dem Ausdruck (3.) auch der Ausdruck (4.) den Wert Null hat.

Ist endlich gleichzeitig

$$\begin{aligned} &\alpha x_0^{(n+1)} + \beta y_0^{(n+1)} + \gamma z_0^{(n+1)} = 0, \\ &\alpha x_0^{(m-n+2)} + \beta y_0^{(m-n+2)} + \gamma z_0^{(m-n+2)} = 0, \end{aligned} \tag{5.}$$

so verschwinden für $t=t_0$ nach Satz V, 2 die Ableitungen der Funktion (2.) bis zur Ordnung $p-m+1$ inklusive, während die $(p-m+2)$-te Ableitung sicher von Null verschieden und daher die gesuchte Ordnungszahl gleich $p-m+2$ ist.

Um die geometrische Bedeutung der Gleichungen (3.) und (5.) zu erkennen, bemerken wir, daß im Falle $n>0$ die Tangente im Punkte (x_0, y_0, z_0) unbestimmt wird, sich aber, bei stetigem Übergange von t in den Wert t_0, einer bestimmten Grenzlage nähert, deren Richtungskosinus den Ausdrücken $x_0^{(n+1)}, y_0^{(n+1)}, z_0^{(n+1)}$ proportional sind. Ebenso wird, im Falle $m>0$, die Schmiegungsebene des betrachteten Punktes unbestimmt, nähert sich aber, bei stetiger Änderung von t, einer Grenzlage, für welche die Richtungskosinus der Binormale den Ausdrücken $A_0^{(m)}, B_0^{(m)}, C_0^{(m)}$ oder, was auf dasselbe herauskommt, den aus den Koeffizienten von α, β, γ in den Gleichungen (5.) gebildeten Determinanten zweiter Ordnung proportional sind. Diese Grenzlagen betrachten wir als Tangente, bezw. Schmiegungsebene des untersuchten Punktes. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Satz VI. Der Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ der gegebenen Kurve sei durch die Ordnungszahlen n, m, p $(n \geqq 0)$ charakterisiert; es seien ferner α, β, γ konstante Größen, die nicht sämtlich den Wert Null haben und den Richtungskosinus einer gewissen Geraden l proportional sind.

Ist dann die Gerade l nicht senkrecht zur Tangente des Punktes P_0, so ist

$$\alpha x_0^{(n+1)} + \beta y_0^{(n+1)} + \gamma z_0^{(n+1)} \neq 0, \quad \text{Ord}\,[\alpha x' + \beta y' + \gamma z'] = n.$$

Ist dagegen die Gerade l senkrecht zur Tangente des Punktes P_0, ohne mit der Richtung der Binormale übereinzustimmen, so hat man

$$\begin{aligned} &\alpha x_0^{(n+1)} + \beta y_0^{(n+1)} + \gamma z_0^{(n+1)} = 0, \\ &\alpha x_0^{(m-n+2)} + \beta y_0^{(m-n+2)} + \gamma z_0^{(m-n+2)} \neq 0, \end{aligned} \qquad \text{Ord}\,[\alpha x' + \beta y' + \gamma z'] = m-n+1.$$

Hat endlich die Gerade l die Richtung der Binormale des Punktes P_0, so ist gleichzeitig

$$\alpha x_0^{(n+1)} + \beta y_0^{(n+1)} + \gamma z_0^{(n+1)} = 0,$$
$$\alpha x_0^{(m-n+2)} + \beta y_0^{(m-n+2)} + \gamma z_0^{(m-n+2)} = 0,$$

$$\text{Ord}\,[\alpha x' + \beta y' + \gamma z'] = p - m + 2.$$

5. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Konstanten, von denen die drei ersten nicht sämtlich Null sind. Dann ist die Ordnungszahl des Ausdruckes

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \tag{6.}$$

an der Stelle t_0 gleich Null oder größer als Null, je nachdem der Punkt $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ außerhalb der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

oder auf derselben liegt. Geht diese Ebene durch den genannten Punkt, so ist die Ordnungszahl des Ausdruckes (6.), nach Satz IV, um Eins größer, als die seiner Ableitung, die wir in der vorigen Nummer bestimmt haben.

Satz VII. Der Punkt $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ der gegebenen Kurve sei durch die Ordnungszahlen $n, m, p\,(n \geqq 0)$ charakterisiert; es seien ferner $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ konstante Größen, von denen die drei ersten nicht sämtlich verschwinden.

Geht dann die durch die Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

definierte Ebene E nicht durch den Punkt P_0, so ist

$$\text{Ord}\,[\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta] = 0.$$

Geht dagegen diese Ebene durch den Punkt P_0, ohne die Tangente dieses Punktes zu enthalten, so ist

$$\text{Ord}\,[\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta] = n + 1.$$

Enthält aber die Ebene E die Tangente des Punktes P_0, ohne mit der Schmiegungsebene identisch zu sein, so ist

$$\text{Ord } [\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta]=m-n+2.$$

Fällt endlich die Ebene E mit der Schmiegungsebene des Punktes P_0 zusammen, so hat man

$$\text{Ord } [\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta]=p-m+3.$$

6. Es lassen sich noch die nachstehenden Sätze beweisen, von denen wir in der Folge Gebrauch zu machen haben werden:

Satz VIII. Der Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ der gegebenen Kurve sei durch die Ordnungszahlen n, m, p $(n \geqq 0)$ charakterisiert; es seien ferner α, β, γ konstante Größen, die nicht sämtlich den Wert Null haben und den Richtungskosinus einer gewissen Geraden l proportional sind.

Ist dann die Gerade l nicht senkrecht zur Binormale des Punktes P_0, so ist

$$\alpha A_0^{(m)}+\beta B_0^{(m)}+\gamma C_0^{(m)} \neq 0, \quad \text{Ord } [\alpha A+\beta B+\gamma C]=m.$$

Hat dagegen die Gerade l eine zur Binormale des Punktes P_0 senkrechte Lage, ohne der Tangente dieses Punktes parallel zu sein, so ist

$$\alpha A_0^{(m)}+\beta B_0^{(m)}+\gamma C_0^{(m)}=0,$$
$$\alpha:\beta:\gamma \neq x_0^{(n+1)}:y_0^{(n+1)}:z_0^{(n+1)}, \qquad \text{Ord } [\alpha A+\beta B+\gamma C]=p-m+n+1.$$

Ist endlich die Gerade l parallel der Tangente des Punktes P_0, so hat man

$$\alpha:\beta:\gamma=x_0^{(n+1)}:y_0^{(n+1)}:z_0^{(n+1)}, \quad \text{Ord } [\alpha A+\beta B+\gamma C]=p-n+2.$$

Satz IX. Der Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ der gegebenen Kurve sei durch die Ordnungszahlen n, m, p $(n \geqq 0)$ charakterisiert, und es seien zunächst x_0, y_0, z_0 nicht gleichzeitig Null.

Ist dann der Koordinatenanfangspunkt O nicht in der Schmiegungsebene des Punktes P_0, gelegen, so ist

$$A_0^{(m)}x_0+B_0^{(m)}y_0+C_0^{(m)}z_0 \neq 0, \quad \text{Ord } [Ax+By+Cz]=m.$$

Liegt dagegen der Punkt O in der Schmiegungsebene, nicht aber auf der Tangente des Punktes P_0, so ist

$$A_0^{(m)} x_0 + B_0^{(m)} y_0 + C_0^{(m)} z_0 = 0, \qquad \text{Ord}\,[Ax+By+Cz] = p-m+n+1.$$
$$x_0 : y_0 : z_0 \neq x_0^{(n+1)} : y_0^{(n+1)} : z_0^{(n+1)},$$

Liegt aber der Punkt O auf der Tangente des Punktes P_0, ohne mit diesem Punkte zusammenzufallen, so hat man

$$x_0 : y_0 : z_0 = x_0^{(n+1)} : y_0^{(n+1)} : z_0^{(n+1)}, \quad \text{Ord}\,[Ax+By+Cz] = p-n+2.$$

Fallen endlich die Punkte O und P_0 zusammen, so ist

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad \text{Ord}\,[Ax+By+Cz] = p+3.$$

Satz X. Der Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ der gegebenen Kurve sei durch die Ordnungszahlen n, m, p $(n \geqq 0)$ charakterisiert; es seien ferner a, α, β, γ konstante Größen, von denen die drei letzten nicht sämtlich den Wert Null haben; dann sind für die Funktion

$$v = a\,(Ax+By+Cz) + \alpha A + \beta B + \gamma C$$

und ihre Ordnungszahl folgende vier Fälle möglich:

1. $(ax_0+\alpha)\,A_0^{(m)} + (ay_0+\beta)\,B_0^{(m)} + (az_0+\gamma)\,C_0^{(m)} \neq 0$, $\quad \text{Ord}\,[v] = m$;
2. $(ax_0+\alpha)A_0^{(m)} + (ay_0+\beta)B_0^{(m)} + (az_0+\gamma)C_0^{(m)} = 0$,
   $ax_0+\alpha : ay_0+\beta : az_0+\gamma \neq x_0^{(n+1)} : y_0^{(n+1)} : z_0^{(n+1)}$, $\quad \text{Ord}\,[v] = p-m+n+1$;
3. $ax_0+\alpha : ay_0+\beta : az_0+\gamma = x_0^{(n+1)} : y_0^{(n+1)} : z_0^{(n+1)}$,
   aber nicht gleichzeitig $ax_0+\alpha = ay_0+\beta = az_0+\gamma = 0$, $\quad \text{Ord}\,[v] = p-n+2$;
4. $ax_0+\alpha = ay_0+\beta = az_0+\gamma = 0$, $\quad \text{Ord}\,[v] = p+3$.

§ 2.

Kriterien für die acht Arten von Punkten.

7. Wie bereits in Nr. 1 erwähnt, nehmen wir bei der Betrachtung eines im Endlichen gelegenen Kurvenpunktes an, daß dieser dem Parameterwert $t = t_0$ entspreche und die Koordinaten der Punkte der Kurve für ein

gewisses die Stelle t_0 einschließendes Intervall als eindeutige analytische Funktionen der Veränderlichen t gegeben sind.

Die Bedingungen für das Auftreten von Singularitäten bei im Endlichen gelegenen Kurvenpunkten habe ich bereits in einer früheren Arbeit*) publiziert:

Satz XI. Ein im Endlichen gelegener Kurvenpunkt ist ein gewöhnlicher oder ein Rückkehrpunkt, je nachdem Ord $[x', y', z']$ *eine gerade oder eine ungerade Zahl ist; er hat eine gewöhnliche oder eine Rückkehrtangente, je nachdem* Ord $[A, B, C]$ *eine gerade oder ungerade Zahl ist; er hat eine gewöhnliche oder eine Rückkehrschmiegungsebene, je nachdem die beiden Zahlen* Ord $[x', y', z']$ *und* Ord $[\varDelta]$ *gleichzeitig gerade oder ungerade sind, oder dies nicht der Fall ist.*

Es ergeben sich hieraus für die einzelnen acht Fälle folgende Kriterien:

$$\begin{array}{rlll}
\text{I} +++: & \text{Ord}\,[x', y', z'] = 2\alpha, & \text{Ord}\,[A, B, C] = 2\beta, & \text{Ord}\,[\varDelta] = 2\gamma, \\
\text{II} ++-: & \text{Ord}\,[x', y', z'] = 2\alpha, & \text{Ord}\,[A, B, C] = 2\beta, & \text{Ord}\,[\varDelta] = 2\gamma+1, \\
\text{III} +-+: & \text{Ord}\,[x', y', z'] = 2\alpha, & \text{Ord}\,[A, B, C] = 2\beta+1, & \text{Ord}\,[\varDelta] = 2\gamma, \\
\text{IV} +--: & \text{Ord}\,[x', y', z'] = 2\alpha, & \text{Ord}\,[A, B, C] = 2\beta+1, & \text{Ord}\,[\varDelta] = 2\gamma+1, \\
\text{V} -++: & \text{Ord}\,[x', y', z'] = 2\alpha+1, & \text{Ord}\,[A, B, C] = 2\beta, & \text{Ord}\,[\varDelta] = 2\gamma+1, \\
\text{VI} -+-: & \text{Ord}\,[x', y', z'] = 2\alpha+1, & \text{Ord}\,[A, B, C] = 2\beta, & \text{Ord}\,[\varDelta] = 2\gamma, \\
\text{VII} --+: & \text{Ord}\,[x', y', z'] = 2\alpha+1, & \text{Ord}\,[A, B, C] = 2\beta+1, & \text{Ord}\,[\varDelta] = 2\gamma+1, \\
\text{VIII} ---: & \text{Ord}\,[x', y', z'] = 2\alpha+1, & \text{Ord}\,[A, B, C] = 2\beta+1, & \text{Ord}\,[\varDelta] = 2\gamma.
\end{array}$$

8. Um die Kriterien für Singularitäten im Unendlichen gelegener Kurvenpunkte aufzustellen, unterwerfen wir den Raum einer zentralkollinearen Transformation mit dem Zentrum im Koordinatenanfangspunkt:

$$(1.)\qquad \xi = \frac{x}{ax+by+cz+h}, \quad \eta = \frac{y}{ax+by+cz+h}, \quad \zeta = \frac{z}{ax+by+cz+h}.$$

---

*) *Meder*, Über einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven. Dieses Journal Bd. 116, S. 64 ff. Gleichzeitig mit dieser Arbeit ist eine Abhandlung von *Staude*: „Über den Sinn der Windung in den singulären Punkten einer Raumcurve" (Amer. Journ. of Math. vol. XVII, p. 359—380) erschienen, in der die Kriterien in derselben Gestalt mitgeteilt werden.

Hierbei bedeuten a, b, c, h konstante Größen, von denen die letzte von Null verschieden ist:

$$h \neq 0, \tag{2.}$$

da im entgegengesetzten Falle jedem Punkte (x, y, z) ein Punkt der festen Ebene

$$a\xi + b\eta + c\zeta - 1 = 0$$

entspräche, die untersuchte Kurve daher in eine ebene Kurve überginge, bei welcher von Singularitäten der Schmiegungsebene nicht die Rede sein kann.

Durch die Transformation (1.) geht jeder Punkt $P(x, y, z)$ der gegebenen Kurve k in einen Punkt $\Pi(\xi, \eta, \zeta)$ einer anderen Kurve $\varkappa$ über, wobei im besonderen dem im Endlichen gelegenen durch die Ordnungszahlen n, m, p charakterisierten Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ der Punkt $\Pi_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ entspreche.

Für die Ableitungen von ξ, η, ζ nach t erhält man:

$$\xi' = \frac{(by + cz + h)x' - bxy' - cxz'}{(ax + by + cz + h)^2}, \quad \eta' = \frac{-ayx' + (ax + cz + h)y' - cyz'}{(ax + by + cz + h)^2},$$

$$\zeta' = \frac{-azx' - bzy' + (ax + by + h)z'}{(ax + by + cz + h)^2}.$$

Liegt der Punkt Π_0 ebenfalls im Endlichen, so ist

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + h \neq 0, \tag{3.}$$

und man hat

$$\text{Ord } [\xi', \eta', \zeta'] = n,$$

es sei denn, daß gleichzeitig

$$\begin{aligned}
(by_0 + cz_0 + h)\, x_0^{(n+1)} - bx_0 y_0^{(n+1)} - cx_0 z_0^{(n+1)} &= 0, \\
-ay_0 x_0^{(n+1)} + (ax_0 + cz_0 + h)\, y_0^{(n+1)} - cy_0 z_0^{(n+1)} &= 0, \\
-az_0 x_0^{(n+1)} - bz_0 y_0^{(n+1)} + (ax_0 + by_0 + h)\, z_0^{(n+1)} &= 0
\end{aligned}$$

ist. Das ist aber nicht möglich, da die Determinante der Koeffizienten

von $x_0^{(n+1)}, y_0^{(n+1)}, z_0^{(n+1)}$ in diesem System den Wert $h(ax_0+by_0+cz_0+h)$ hat und den Voraussetzungen (2.) und (3.) zufolge sicher von Null verschieden ist.

Liegt jedoch der Punkt Π_0 im Unendlichen, so gilt für den entsprechenden Punkt P_0 die Gleichung

$$ax_0+by_0+cz_0+h=0, \tag{4.}$$

welche aussagt, daß der Punkt P_0 in der Verschwindungsebene des Systems (x, y, z) liegt.

Daß in den Ausdrücken (1.) an der Stelle $t=t_0$ die Zähler x, y, z sämtlich verschwinden, ist nicht möglich, da dann infolge der Gleichung (4.) $h=0$ wäre, was wir ausgeschlossen haben. Es ist somit

$$\text{Ord } [x, y, z]=0$$

und infolgedessen nach Satz III

$$\text{Ord } [\xi, \eta, \zeta]=-\text{Ord } [ax+by+cz+h].$$

Nach Satz VII ist daher Ord $[\xi, \eta, \zeta]$ gleich einer der Zahlen

$$-n-1, \quad -m+n-2, \quad -p+m-3, \tag{5.}$$

je nach der Lage der in diesem Satze E genannten Ebene, die jetzt die Verschwindungsebene des Systems (x, y, z) ist. Im ersten Falle hat die Tangente des im Unendlichen gelegenen Punktes Π_0 der Kurve $\varkappa$ eine asymptotische Lage, im zweiten Fall liegt sie ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen, während die Schmiegungsebene eine asymptotische Lage hat; im dritten Fall fällt auch diese ganz ins Unendliche.

Da die Zahlen (5.) sämtlich negativ sind, so ist nach Satz IV die Ordnungszahl Ord $[\xi', \eta', \zeta']$ um Eins kleiner, also bzw. gleich

$$-n-2, \quad -m+n-3, \quad -p+m-4.$$

9. Den Größen A, B, C entsprechen im transformierten System die Ausdrücke

$$\mathsf{A}=\eta'\zeta''-\eta''\zeta', \quad \mathsf{B}=\zeta'\xi''-\zeta''\xi', \quad \Gamma=\xi'\eta''-\xi''\eta',$$

die sich aus den Gleichungen (1.) in der folgenden Gestalt ergeben:

$$(6.)\qquad \mathsf{A}=\frac{a(Ax+By+Cz)+hA}{(ax+by+cz+h)^3},\qquad \mathsf{B}=\frac{b(Ax+By+Cz)+hB}{(ax+by+cz+h)^3},$$

$$\mathsf{\Gamma}=\frac{c(Ax+By+Cz)+hC}{(ax+by+cz+h)^3}.$$

Liegt der Punkt Π_0 im Endlichen, so ist wiederum der gemeinsame Nenner dieser Ausdrücke für $t=t_0$ von Null verschieden und nach Satz X:

$$\text{Ord}\ [\mathsf{A},\mathsf{B},\mathsf{\Gamma}]=m,$$

es sei denn, daß gleichzeitig

$$(7.)\qquad \begin{aligned} a(A_0^{(m)}x_0+B_0^{(m)}y_0+C_0^{(m)}z_0)+hA_0^{(m)}&=0,\\ b(A_0^{(m)}x_0+B_0^{(m)}y_0+C_0^{(m)}z_0)+hB_0^{(m)}&=0,\\ c(A_0^{(m)}x_0+B_0^{(m)}y_0+C_0^{(m)}z_0)+hC_0^{(m)}&=0 \end{aligned}$$

ist. Dies ist jedoch nicht möglich, da die Determinante der Koeffizienten von $A_0^{(m)}, B_0^{(m)}, C_0^{(m)}$ in dem System (7.) den Wert $h^2(ax_0+by_0+cz_0+h)$ hat und nach den Voraussetzungen (2.) und (3.) nicht verschwinden kann.

Es müssen noch die Fälle untersucht werden, in denen der Punkt Π_0 im Unendlichen liegt. Bezeichnen wir zur Abkürzung die Zähler der Ausdrücke (6.) bzw. mit u, v, w, so ist nach Satz X

$$\text{Ord}\ [u,v,w]=m,$$

es sei denn, daß das Gleichungssystem (7.) bestehe, welcher Fall jetzt sehr wohl eintreten kann.

Bestehen die Gleichungen (7.), so ist nach Satz X:

$$(8.)\qquad \text{Ord}\ [u,v,w]=p-m+n+1,$$

wenn nicht auch noch

$$(9.)\qquad \begin{aligned} a(A_0^{(p-m+n+1)}x_0+B_0^{(p-m+n+1)}y_0+C_0^{(p-m+n+1)}z_0)+hA_0^{(p-m+n+1)}&=0,\\ b(A_0^{(p-m+n+1)}x_0+B_0^{(p-m+n+1)}y_0+C_0^{(p-m+n+1)}z_0)+hB_0^{(p-m+n+1)}&=0,\\ c(A_0^{(p-m+n+1)}x_0+B_0^{(p-m+n+1)}y_0+C_0^{(p-m+n+1)}z_0)+hC_0^{(p-m+n+1)}&=0 \end{aligned}$$

ist. Aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungssysteme (7.) und (9.) würde aber

$$A_0^{(m)} : B_0^{(m)} : C_0^{(m)} = A_0^{(p-m+n+1)} : B_0^{(p-m+n+1)} : C_0^{(p-m+n+1)}$$

und somit ein Widerspruch gegen Satz V, 3 folgen. Da auch der letzte im Satz X enthaltene Fall, nach welchem gleichzeitig

$$ax_0+h, ay_0, az_0, bx_0, by_0+h, bz_0, cx_0, cy_0, cz_0+h$$

verschwinden müßten, bei von Null verschiedenem h nicht eintreten kann, so folgt aus dem Bestehen der Gleichungen (7.) stets die Relation (8.). Es findet dies statt, wenn

$$a:b:c = A_0^{(m)} : B_0^{(m)} : C_0^{(m)}$$

ist, d. h. wenn die Verschwindungsebene des Systems (x, y, z) mit der Schmiegungsebene des Punktes P_0 zusammenfällt oder, was dasselbe ist, wenn die Schmiegungsebene des Punktes Π_0 ganz im Unendlichen liegt.

Die Ordnungszahl des gemeinsamen Nenners der Ausdrücke (6.) ergibt sich, nach den Sätzen II und VII, je nach der Lage der Tangente und Schmiegungsebene der Kurve $\varkappa$ gleich einer der drei Zahlen

$$3(n+1),\ 3(m-n+2),\ 3(p-m+3).$$

Nach Satz III erhalten wir hieraus für Ord $[\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma]$ bezw. die Werte

$$m-3n-3,\ -2m+3n-6,\ -2p+2m+n-8.$$

10. Der Größe Δ entspricht im kollinear verwandten Raume die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{vmatrix},$$

die sich aus den Gleichungen (1.) in der Form

$$D = \frac{h\Delta}{(ax+by+cz+h)^4}$$

ergibt. Die Ordnungszahl des Zählers ist gleich p, die des Nenners bezw. gleich 0, $4(n+1)$, $4(m-n+2)$, $4(p-m+3)$ je nach der Lage des Punktes Π_0 und dem Verhalten seiner Tangente und Schmiegungsebene, daher die Ordnungszahl von D gleich einem der Werte

$$p,\quad p-4n-4,\quad p-4m+4n-8,\quad -3p+4m-12.$$

Satz XII. Wird durch eine räumliche Zentralkollineation die gegebene Kurve in eine andere übergeführt, wobei dem im Endlichen gelegenen, durch die Ordnungszahlen n, m, p charakterisierten Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ der Punkt $\Pi_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ entspricht, so findet folgendes statt:

1. *Liegt der Punkt Π_0 im Endlichen, so gilt auch für ihn*

$$\text{Ord}\ [\xi', \eta', \zeta'] = n,\quad \text{Ord}\ [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma] = m,\quad \text{Ord}\ [D] = p.$$

2. *Liegt der Punkt Π_0 im Unendlichen und hat dabei eine asymptotische Tangente, so ist*

$$\text{Ord}\ [\xi', \eta', \xi'] = -n-2,\quad \text{Ord}\ [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma] = m-3n-3,\quad \text{Ord}\ [D] = p-4n-4.$$

3. *Liegt auch die Tangente des Punktes Π_0 im Unendlichen, während seine Schmiegungsebene eine asymptotische Lage hat, so ist*

$$\text{Ord}\ [\xi', \eta', \zeta'] = -m+n-3,\quad \text{Ord}\ [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma] = -2m+3n-6,$$
$$\text{Ord}\ [D] = p-4m+4n-8.$$

4. *Liegt auch die Schmiegungsebene des Punktes Π_0 ganz im Unendlichen, so ist*

$$\text{Ord}\ [\xi', \eta', \zeta'] = -p+m-4,\quad \text{Ord}\ [\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma] = -2p+2m+n-8,$$
$$\text{Ord}\ [D] = -3p+4m-12.$$

11. Der eben gefundene Satz setzt uns in den Stand, die Kriterien für die 8 Arten von Punkten auf im Unendlichen gelegene Punkte auszudehnen. Soll ein im Unendlichen gelegener Kurvenpunkt untersucht werden, so denken wir uns durch eine räumliche Zentralkollineation die gegebene Kurve $\varkappa$ in eine andere k übergeführt, bei der dem zu untersuchenden im Unendlichen liegenden Punkt Π_0 ein im Endlichen gelegener

P_0 entspricht. Läßt sich dann, *wie wir bei der Untersuchung singulärer Punkte im Unendlichen stets voraussetzen werden,* auf der Kurve k ein den Punkt P_0 im Innern enthaltendes Stück abgrenzen, so daß für alle Punkte dieses Stückes die Koordinaten x, y, z eindeutige analytische Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t sind, so gehört der Punkt P_0 einer der von uns betrachteten 8 Arten an und wir schreiben den Punkten P_0 und Π_0 denselben Charakter zu.

Der Satz XII zeigt uns, daß die Bestimmung des Charakters im Unendlichen gelegener Kurvenpunkte im wesentlichen ebenfalls auf die Aufstellung der Ordnungszahlen

$$\text{Ord}\,[\xi', \eta', \zeta'],\ \text{Ord}\,[\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma],\ \text{Ord}\,[D],$$

also darauf herauskommt, ob die Größen ξ', η', ζ', $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, D$ ihr Zeichen beibehalten oder umkehren. Für im Endlichen gelegene Punkte waren alle diese Größen endlich und ein Zeichenwechsel fand stets durch den Wert Null hindurch statt. Bei im Unendlichen gelegenen Punkten braucht dies nicht mehr der Fall zu sein und der Zeichenwechsel kann sich auch durch den Wert Unendlich hindurch vollziehen.

In der Tat folgt aus den Ungleichungen

$$n \geqq 0,\ m \geqq 2n,\ p \geqq 2m-n,$$

daß $-n-2$, $-m+n-3$, $-p+m-4$ stets negativ sind; von den Ausdrücken ξ', η', ζ' ist daher in den Satz XII, 2.—4. angeführten Fällen für $t=t_0$ stets mindestens einer unendlich groß. Da von den Ordnungszahlen $m-3n-3$, $-2m+3n-6$, $-2p+2m+n-8$ die beiden letzten stets negativ sind, während die erste positiv, Null oder negativ sein kann, so ist von den Größen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ für $t=t_0$ in den Fällen 3. und 4. stets mindestens eine unendlich groß, während dies im Falle 2. nicht einzutreten braucht. Die Determinante D endlich ist nur in dem Falle 4. sicher unendlich groß*).

*) Die in meiner Abhandlung „Zur Theorie der singulären Punkte einer Raumcurve“ (Dieses Journ. Bd. 121, S. 230—244) S. 240 aufgestellten Kriterien für Singularitäten im Unendlichen gelegener Kurvenpunkte sind falsch. Bei der Herleitung der Kriterien für einen im Endlichen liegenden Punkt konnte von der Zeichenänderung

12. Wir wollen noch die Lage der Normalebene und rektifizierenden Ebene näher untersuchen, die einem im Unendlichen liegenden Kurvenpunkt entspricht. Hierbei nennen wir Normalebene und rektifizierende Ebene eines im Unendlichen gelegenen Kurvenpunktes die Lage, in welche die Normalebene, bzw. rektifizierende Ebene übergeht, wenn der entsprechende Kurvenpunkt sich auf der Kurve in die Unendlichkeit entfernt.

Die Gleichung der Normalebene eines Punktes $\Pi(\xi, \eta, \zeta)$ der gegebenen Kurve hat, wenn man mit Ξ, H, Z die laufenden Koordinaten dieser Ebene bezeichnet, die Gestalt

$$(\Xi-\xi)\xi'+(H-\eta)\eta'+(Z-\zeta)\zeta'=0.$$

Es möge der Punkt Π sich auf der Kurve fortbewegen und der dem Parameterwert $t=t_0$ entsprechende unendlich ferne Punkt der Kurve mit Π_0 bezeichnet werden. Dann nähert sich die Normalebene für $t=t_0$ einer bestimmten Grenzlage oder fällt ihrer ganzen Ausdehnung nach ins Unendliche, je nachdem ihre Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt für $t=t_0$ einen endlichen oder unendlich großen Wert erhält. Für diese Entfernung u hat man

$$u=\frac{\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}}=\frac{\frac{d}{dt}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{2\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}}.$$

Da der Punkt Π_0 im Unendlichen liegt, so ist

$$\text{Ord}\,[\xi, \eta, \zeta]<0,$$

und es folgt sukzessive nach Nr. 2:

$$\text{Ord}\,[\xi^2+\eta^2+\zeta^2]=2\,\text{Ord}\,[\xi, \eta, \zeta],$$

$$\text{Ord}\left[\frac{d}{dt}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right]=2\,\text{Ord}\,[\xi, \eta, \zeta]-1,$$

---

gewisser Größen abgesehen werden, da eine derartige Zeichenänderung nur bei speziellen Lagen des Koordinatensystems eintreten konnte. Ich habe es übersehen, daß eine solche Zeichenänderung bei den entsprechenden Größen für einen im Unendlichen gelegenen Punkt in gewissen Fällen eintreten *muß*.

$$\text{Ord}\,[\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}]=\text{Ord}\,[\xi',\eta',\zeta']=\text{Ord}\,[\xi,\eta,\zeta]-1\,,$$

$$\text{Ord}\,[u]=\text{Ord}\,[\xi,\eta,\zeta].$$

Da diese Zahl negativ ist, so hat u für $t=t_0$ einen unendlich großen Wert, die Normalebene eines im Unendlichen gelegenen Kurvenpunktes fällt stets ihrer ganzen Ausdehnung nach ins Unendliche. Dasselbe ist infolgedessen mit der Haupt- und Binormale der Fall.

Die rektifizierende Ebene des im Unendlichen liegenden Punktes Π_0 fällt bei einer asymptotischen Tangente nicht ins Unendliche, da sie diese Tangente enthält. Liegt aber die Tangente ganz im Unendlichen, so findet dasselbe bei der rektifizierenden Ebene statt. Im Falle einer asymptotischen Schmiegungsebene des Punktes Π_0 ist dies leicht einzusehen; denn wäre die rektifizierende Ebene nicht im Unendlichen gelegen, so müßte sie der Schmiegungsebene, mit welcher sie die im Unendlichen gelegene Tangente gemein hat, parallel sein, was nicht sein kann. Der letzte Fall, daß auch die Schmiegungsebene des Punktes Π_0 ganz im Unendlichen liegt, erfordert eine eingehendere Untersuchung in der Art der für die Normalebene angestellten; diese Untersuchung liefert das schon erwähnte Resultat.

§ 3.

Bogenelement, Kontingenz- und Torsionswinkel, Krümmung, Torsion und sphärische Krümmung.

13. In den Formeln für das Bogenelement ds, den Kontingenzwinkel $d\varepsilon$ und den Torsionswinkel $d\omega$:

$$(1.)\quad ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt,\quad d\varepsilon=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt,\quad d\omega=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\cdot\Delta}{A^2+B^2+C^2}\,dt$$

wird meistens das Bogenelement als eine nie negative Größe definiert, die positive Richtung der Tangente mit der wachsenden Werten des Parameters t entsprechenden übereinstimmend angenommen und über die positive Richtung der Binormale ebenfalls eine gewisse Festsetzung getroffen. Diese Annahmen, die auch der Betrachtung singulärer Punkte zugrunde gelegt

werden können*), leiden jedoch an dem Übelstande, daß in singulären Punkten Ableitungen der Bogenlänge von einer gewissen Ordnung unstetig werden können und ferner der Kontingenz- und der Torsionswinkel in gewissen Fällen zu 180° angenommen werden müssen, so daß die beiden letzten der Formeln (1.) ihre Gültigkeit verlieren. In der vorliegenden Arbeit wird daher über die Vorzeichen der Ausdrücke

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad \varepsilon' = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad \omega' = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \cdot \Delta}{A^2 + B^2 + C^2}$$

gemäß Nr. 2. die Verfügung getroffen, daß den in diesen Ausdrücken auftretenden Wurzelzeichen für irgendeinen von $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ verschiedenen Punkt des betrachteten Intervalls ein beliebiges Vorzeichen beizulegen und dieses Vorzeichen in den übrigen Punkten des Intervalls gemäß der analytischen Fortsetzung zu bestimmen ist, so daß für die Änderung des Vorzeichens der Wert der Ordnungszahl maßgebend ist. Diese Annahme ist gleichbedeutend damit, daß die positive Richtung der Tangente, bezw. Binormale, in einem beliebigen, regulären Punkte des betrachteten Kurvenstückes irgendwie festgesetzt wird und die positiven Richtungen zweier benachbarter Tangenten oder Binormalen stets einen unendlich kleinen Winkel miteinander bilden.

Zur Berechnung der Ordnungszahlen dienen uns die in Nr. 2 angeführten Sätze, welche uns liefern:

$$\text{Ord}\,[s'] = \text{Ord}\,[x', y', z'],$$

$$\text{Ord}\,[\varepsilon'] = \text{Ord}\,[A, B, C] - 2\,\text{Ord}\,[x', y', z'],$$

$$\text{Ord}\,[\omega'] = \text{Ord}\,[x', y', z'] + \text{Ord}\,[\Delta] - 2\,\text{Ord}\,[A, B, C].$$

Die auf der rechten Seite stehenden Ordnungszahlen gibt uns der Satz XII, so daß wir das folgende Resultat erhalten:

---

*) Vgl. z. B. *v. Lilienthal*, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1908, S. 242—272. Ich habe dieses Buch in das Literaturverzeichnis, das ich meiner in russischer Sprache veröffentlichten Arbeit angehängt habe, leider nicht aufnehmen können, da es gleichzeitig mit dieser erschienen ist.

Satz XIII. Es möge der betrachtete Kurvenpunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ im Endlichen liegen und durch die Ordnungszahlen n, m, p charakterisiert sein oder durch eine räumliche Kollineation in einen solchen Punkt übergeführt werden können. Dann haben die Ordnungszahlen der durch dt dividierten Ausdrücke für das Bogenelement ds, den Kontingenzwinkel $d\varepsilon$ und den Torsionswinkel $d\omega$ folgende Werte:

1. *Liegt der Punkt P_0 im Endlichen, so ist*

$$\text{Ord}\,[s'] = n, \quad \text{Ord}\,[\varepsilon'] = m-2n, \quad \text{Ord}\,[\omega'] = p-2m+n.$$

2. *Liegt der Punkt P_0 im Unendlichen und hat er eine asymptotische Tangente, so ist*

$$\text{Ord}\,[s'] = -n-2, \quad \text{Ord}\,[\varepsilon'] = m-n+1, \quad \text{Ord}\,[\omega'] = p-2m+n.$$

3. *Liegt auch die Tangente des Punktes P_0 im Unendlichen, während seine Schmiegungsebene eine asymptotische Lage hat, so ist*

$$\text{Ord}\,[s'] = -m+n-3, \quad \text{Ord}\,[\varepsilon'] = n, \quad \text{Ord}\,[\omega'] = p-m-n+1.$$

4. *Liegt auch die Schmiegungsebene des Punktes P_0 im Unendlichen, so ist*

$$\text{Ord}\,[s'] = -p+m-4, \quad \text{Ord}\,[\varepsilon'] = n, \quad \text{Ord}\,[\omega'] = m-2n.$$

Zieht man die Ungleichungen

$$(2.) \qquad n \geqq 0, \; m \geqq 2n, \; p \geqq 2m-n$$

in Betracht, so ergibt sich, daß die Ordnungszahlen von ε' und ω' nie negativ sind, d. h. der Kontingenzwinkel $d\varepsilon$ und der Torsionswinkel $d\omega$ sind stets unendlich kleine Größen von mindestens derselben Ordnung wie dt.

Was den Zeichenwechsel der in Rede stehenden Größen anbetrifft, so erhält man nach dem letzten Satz bei einem im Endlichen liegenden Punkt P_0 einen Zeichenwechsel im analytischen Ausdruck für das Bogenelement, wenn der Punkt ein Rückkehrpunkt ist, für den Kontingenzwinkel, wenn er eine Rückkehrtangente hat, und für den Torsionswinkel, wenn seine Schmiegungs-

ebene eine Rückkehrebene ist*). Eine geometrische Deutung für das Beibehalten und den Wechsel des Vorzeichens bei diesen Größen habe ich bereits in den oben angeführten Arbeiten gegeben.

14. Die Formeln für den Krümmungsradius R und den Torsionsradius T:

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad T = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta}$$

liefern nach Nr. 2 die Gleichungen

$$\mathrm{Ord}\,[R] = 3\,\mathrm{Ord}\,[x', y', z'] - \mathrm{Ord}\,[A, B, C], \quad \mathrm{Ord}\,[T] = 2\,\mathrm{Ord}\,[A, B, C] - \mathrm{Ord}\,[\Delta],$$

aus welchen sich in Verbindung mit Satz XII folgendes ergibt:

Satz XIV. Gelten die Voraussetzungen des Satzes XIII, so haben die Ordnungszahlen des Krümmungsradius R und des Torsionsradius T in den dort unterschiedenen vier Fällen folgende Werte:

1. $\mathrm{Ord}\,[R] = -m + 3n$, $\mathrm{Ord}\,[T] = -p + 2m$;
2. $\mathrm{Ord}\,[R] = -m - 3$, $\mathrm{Ord}\,[T] = -p + 2m - 2n - 2$;
3. $\mathrm{Ord}\,[R] = -m - 3$, $\mathrm{Ord}\,[T] = -p + 2n - 4$;
4. $\mathrm{Ord}\,[R] = -p + m - n - 4$, $\mathrm{Ord}\,[T] = -p + 2n - 4$.

Die in den Fällen 2.—4. des vorstehenden Satzes auftretenden Ordnungszahlen sind infolge der Ungleichungen (2.) stets negativ, d. h. die Radien der Krümmung und Torsion sind in einem unendlich fernen Punkt der Kurve stets unendlich groß. Aus dem ersten Teil des Satzes ergeben sich die bekannten Kriterien dafür, wann R und T unendlich klein, endlich oder unendlich groß sind**). Auch erhält man unter Benutzung der

---

*) Schon *Peterson* (Über Curven und Flächen. Moskau und Leipzig 1868, S. 6—7) macht auf den Zeichenwechsel der analytischen Ausdrücke für das Bogenelement, den Kontingenz- und den Torsionswinkel in den oben erwähnten Fällen aufmerksam, ohne jedoch auf eine genauere Untersuchung der singulären Punkte näher einzugehen.

**) Der erste, der diese Frage für den Krümmungsradius gelöst hat, ist *Möller* (Über den Ort des Krümmungskreiscentrums einer Raumcurve. Acta univ. Lund. XXI, 1884, S. 1—18). Ferner ist sie für die beiden Radien behandelt von den Autoren:

Nr. 7 die bekannten Resultate, daß für einen im Endlichen gelegenen Punkt der Krümmungsradius in den Fällen III $+-+$, IV $+--$, V $-++$, VI $-+-$ und der Torsionsradius in den Fällen II $++-$, IV $+--$, V $-++$, VII $--+$ nicht endlich und dabei von Null verschieden sein kann*). Ferner ergibt sich hieraus, daß der analytische Ausdruck für den Krümmungsradius eines im Endlichen gelegenen Punktes sein Zeichen beibehält oder umkehrt, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt in der Schmiegungsebene auf derselben Seite der Kurventangente bleibt oder nicht**). Endlich ersieht man, daß die Kurve in den Fällen II $++-$, IV $+--$, V $-++$, VII $--+$ den Sinn ihrer Windung umkehrt, in den Fällen I $+++$, III $+-+$, VI $-+-$, VIII $---$ dagegen beibehält, mag der betrachtete Punkt hierbei im Endlichen oder Unendlichen liegen***).

15. Aus der Formel für den Radius der sphärischen Krümmung

$$\varrho = \sqrt{R^2 + \left(\frac{TR'}{s'}\right)^2}$$

folgt nach Nr. 2:

$$\text{Ord}\,[\varrho] = \text{Ord}\left[R, \frac{TR'}{s'}\right].$$

In allen Fällen, in denen R einen unendlich kleinen oder unendlich großen Wert hat, ist nach Satz IV:

$$\text{Ord}\,[R'] = \text{Ord}\,[R] - 1.$$

Meder (Über einige Arten usw. 1896; zitiert S. 94, Anm.*)), *Wölffing* (Die Krümmung der Raumcurven in singulären Punkten derselben. Arch. d. Math. u. Phys. (2), Bd. 15, 1897, S. 146—158), *Burali-Forti* (Sopra alcuni punti singolari delle curve piane e gobbe. Atti d. Acad. Torino, t. 36, 1901. p. 935—938), *Mehmke* (Über die Benennung und kinematische Unterscheidung der verschiedenen Arten von Kurvenpunkten sowie über Krümmungen und Windungen verschiedener Ordnung. Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 49, 1903, S. 62—83), *v. Lilienthal* (Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1908).

*) *Meder*, *Burali-Forti*, *Mehmke*.

**) *Meder* (Zur Theorie usw. 1899; zitiert S. 100, Anm.*)).

***) Für einen im Endlichen gelegenen Punkt von *Staude* (Über den Sinn der Windung usw. 1895) untersucht.

Da ferner, nach Nr. 13,

$$\operatorname{Ord}\left[\frac{s'}{T}\right]=\operatorname{Ord}\left[\omega'\right]\geqq 0$$

ist, so ist dann

$$\operatorname{Ord}\left[\frac{TR'}{s'}\right]=\operatorname{Ord}\left[R\right]-1-\operatorname{Ord}\left[\omega'\right]<\operatorname{Ord}\left[R\right]$$

und deshalb

$$\operatorname{Ord}\left[\varrho\right]=\operatorname{Ord}\left[\frac{TR'}{s'}\right].$$

Mit Hilfe der Sätze XIII und XIV läßt sich diese Ordnungszahl ohne Schwierigkeit für alle Lagen des betrachteten Punktes, seiner Tangente und seiner Schmiegungsebene berechnen.

Hat dagegen R einen endlichen nicht verschwindenden Wert, was nach Nr. 14 nur in den Fällen I $+++$, II $++-$, VII $--+$, VIII $---$ stattfinden kann, so haben wir

$$\operatorname{Ord}\left[R\right]=-m+3n=0;$$

wird die Ordnungszahl von R' noch mit $\varkappa$ bezeichnet, so ist nach Satz III

$$\text{(3.)}\qquad \operatorname{Ord}\left[\frac{TR'}{s'}\right]=-p+2m-n+\varkappa,$$

und die Ordnungszahl von ϱ verschwindet oder hat einen negativen Wert, je nachdem der Ausdruck (3.) nicht negativ oder negativ ist.

Satz XV. Gelten die Voraussetzungen des Satzes XIII, so hat die Ordnungszahl des Radius ϱ der sphärischen Krümmung die folgenden Werte:

1. *Liegt der Punkt P_0 im Endlichen und ist hierbei der Krümmungsradius R unendlich klein oder unendlich groß, so ist*

$$\operatorname{Ord}\left[\varrho\right]=-p+m+2n-1;$$

ist aber R endlich und dabei von Null verschieden, so hat man, wenn $\varkappa$ die Ordnungszahl von R' ist,

$$\operatorname{Ord}\left[\varrho\right]=0 \text{ oder } \operatorname{Ord}\left[\varrho\right]=-p+2m-n+\varkappa,$$

je nachdem letztere Zahl nicht negativ oder negativ ist.

2. *Liegt der Punkt P_0 im Unendlichen und hat er dabei eine asymptotische Tangente, so ist*

$$\text{Ord}\,[\varrho] = -p+m-n-4.$$

3. *Liegt auch die Tangente des Punktes P_0 im Unendlichen, so ist*

$$\text{Ord}\,[\varrho] = -p+n-5.$$

Nach dem ersten Teil des Satzes ist der Radius der sphärischen Krümmung eines im Endlichen liegenden Kurvenpunktes, bei unendlich kleinem oder unendlich großem Krümmungsradius, unendlich klein, endlich oder unendlich groß, je nachdem $-p+m+2n-1$ positiv, Null oder negativ ist. Da aus der Ungleichung $-p+m+2n-1 \geqq 0$ stets die Ungleichung $-m+3n>0$ folgt, so ist die Bedingung $-p+m+2n-1>0$ allein schon notwendig und hinreichend für einen unendlich kleinen, die Bedingung $-p+m+2n-1=0$ hinreichend für einen endlichen Wert von ϱ.

Aus $p \geqq 2m-n$ folgt, daß die Zahl $-p+2m-n$ nicht positiv sein kann. Hat sie den Wert Null , so ist die Ordnungszahl (3.) positiv oder Null, ϱ hat einen endlichen nicht verschwindenden Wert; es ist dieses nur in den Fällen I $+++$ und VII $--+$ möglich.

Satz XVI. Der betrachtete Kurvenpunkt sei im Endlichen gelegen und durch die Ordnungszahlen n, m, p charakterisiert. Ist $-p+m+2n-1>0$, so ist der Radius der sphärischen Krümmung unendlich klein; ist $-p+m+2n-1=0$, so hat er einen endlichen, von Null verschiedenen Wert; ist $-p+m+2n-1<0$ und dabei $-m+3n \neq 0$, so ist er unendlich groß. Ist $-m+3n=0$ und gleichzeitig $-p+2m-n=0$, d. h. $m=3n$, $p=5n$, so hat der Radius der sphärischen Krümmung einen endlichen nicht verschwindenden Wert. Ist gleichzeitig $-m+3n=0$ und $-p+2m-n<0$, so ist er endlich und dabei von Null verschieden, oder unendlich groß, je nachdem $-p+2m-n+\varkappa$, wo $\varkappa$ die Ordnungszahl der Ableitung des Krümmungsradius bezeichnet, nicht negativ oder negativ ist).*

---

*) *Wölffing* geht in seiner S. 106 erwähnten Abhandlung von der Parameterdarstellung

$$x = \lambda t^{\alpha} + \lambda' t^{\alpha+1} + \cdots,\ y = \mu t^{\beta} + \mu' t^{\beta+1} + \cdots, z = \nu t^{\beta} + \nu' t^{\gamma+1} + \cdots,\ 0 < \alpha < \beta < \gamma$$

aus. Er findet

Aus dem ersten Teil des Satzes XV folgt ferner, wenn man Nr. 7 zu Hilfe nimmt:

Satz XVII. Der Radius der sphärischen Krümmung eines im Endlichen liegenden Kurvenpunktes hat bei unendlich kleinem Krümmungsradius in den Fällen I$+++$, IV$+--$, VI$-+-$, VII$--+$, *stets einen unendlich kleinen oder unendlich großen Wert.*

§ 4.

Projektion der Kurve auf eine Ebene und Tangentenfläche der Kurve.

16. Es möge die gegebene Kurve vom Koordinatenanfangspunkt O aus auf die feste Ebene E:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

projiziert werden; hierbei nehmen wir δ von Null verschieden an, da im entgegengesetzten Fall die Projektion sich auf einen Punkt reduzieren würde. Führt man die Bezeichnung

$$v=\alpha x+\beta y+\gamma z$$

$\varrho=\begin{cases}\text{unendlich klein},\\ \text{endlich},\\ \text{unendlich groß},\end{cases}$ je nachdem $2\alpha\gtreqless\gamma$, wenn gleichzeitig $2\alpha\gtrless\beta$ ist;

$\varrho=\begin{cases}\text{endlich},\\ \text{unendlich groß},\end{cases}$ je nachdem $\gamma\lesseqgtr 2\alpha+1$, wenn gleichzeitig $2\alpha=\beta$ ist.

Das erste Resultat deckt sich mit dem von uns gefundenen, wie man leicht sieht, wenn man α, β, γ durch ihre Werte

$$\alpha=n+1,\quad \beta=m-n+2,\quad \gamma=p-m+3$$

ersetzt. Was aber das letzte Resultat anlangt, daß ϱ unendlich groß ist, wenn gleichzeitig $\gamma>2\alpha+1$ und $2\alpha=\beta$ ist, so ist dasselbe nicht immer richtig, da die ersten Koeffizienten der vom Verfasser S. 151 aufgestellten Entwickelung für $T\frac{dR}{ds}$ auch den Wert Null haben können, was dem Verschwinden einiger der ersten Ableitungen des Krümmungsradius entsprechen würde. So hat z. B. für die Kurve $x=t$, $y=t^2$, $z=t^4$ der Radius der sphärischen Krümmung im Anfangspunkt den Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ein, so erhält man für die Projektion $\overline{P}$ des Punktes $P(x,y,z)$ die Gleichungen:

$$(1.) \qquad \overline{x}=-\frac{\delta x}{v},\ \overline{y}=-\frac{\delta y}{v},\ \overline{z}=-\frac{\delta z}{v}.$$

Zur Beantwortung der Frage, ob der Punkt $\overline{P}_0$ ein Rückkehrpunkt ist, genügt die Bestimmung der Ordnungszahl der Ausdrücke

$$(2.) \qquad \overline{x}'=\frac{\delta}{v^2}(xv'-x'v),\ \overline{y}'=\frac{\delta}{v^2}(yv'-y'v),\ \overline{z}'=\frac{\delta}{v^2}(zv'-z'v).$$

Wir nehmen zunächst an, der betrachtete Punkt P_0 der gegebenen Kurve liege im Endlichen und sei durch die Ordnungszahlen n,m,p charakterisiert. Ferner setzen wir voraus, daß v_0 von Null verschieden sei, d. h. daß weder der Punkt P_0 mit dem Projektionszentrum zusammenfalle, noch der projizierende Strahl OP_0 parallel der Ebene E sei. Dann zeigen die Gleichungen (1.), daß auch der Punkt $\overline{P}_0$ im Endlichen liegt.

Die Gleichungen (2.) ergeben:

$$\text{Ord}\ [\overline{x}',\overline{y}',\overline{z}']=\text{Ord}\ [xv'-x'v,\ yv'-y'v,\ zv'-z'v],$$

und zwar ist

$$\text{Ord}\ [\overline{x}',\overline{y}',\overline{z}']=n,$$

wenn man nicht gleichzeitig hat:

$$x_0v_0^{(n+1)}-x_0^{(n+1)}v_0=0,\ y_0v_0^{(n+1)}-y_0^{(n+1)}v_0=0,\ z_0v_0^{(n+1)}-z_0^{(n+1)}v_0=0.$$

Aus dem gleichzeitigen Bestehen dieser Gleichungen folgt:

$$x_0:y_0:z_0=x_0^{(n+1)}:y_0^{(n+1)}:z_0^{(n+1)},$$

d. h. der projizierende Strahl OP_0 fällt mit der Tangente des Punktes P_0 zusammen. Ist dies der Fall, so liefert Satz V, 3:

$$\text{Ord}\ [\overline{x}',\overline{y}',\overline{z}']=m-n+1.$$

Es falle jetzt der Punkt P_0 mit dem Projektionszentrum O zusammen, so daß

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

ist. Dann werden, wie die Gleichungen (1.) zeigen, die Koordinaten des Punktes $\overline{P}_0$ unbestimmt. Nennen wir, wie stets, $\overline{P}_0$ die Grenzlage des Punktes $\overline{P}$ für $t = t_0$, so gilt für diese Grenzlage:

$$\overline{x}_0 = -\frac{\delta x_0^{(n+1)}}{v_0^{(n+1)}}, \quad \overline{y}_0 = -\frac{\delta y_0^{(n+1)}}{v_0^{(n+1)}}, \quad \overline{z}_0 = -\frac{\delta z_0^{(n+1)}}{v_0^{(n+1)}}.$$

Wir betrachten nur den Fall, daß $\overline{P}_0$ im Endlichen liegt. Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür hat man offenbar, daß $v_0^{(n+1)}$ von Null verschieden, also die Tangente des Punktes P_0 nicht parallel der Ebene E ist. In diesem Falle ist

$$\text{Ord } [xv' - x'v,\ yv' - y'v,\ zv' - z'v] = (n+1) + (m - n + 1) = m + 2,$$

wie aus Satz V, 3 folgt. Da ferner die Ordnungszahl von v gleich $n+1$ ist, so ergeben die Gleichungen (2.):

$$\text{Ord } [\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}'] = m - 2n.$$

17. Für das Verhalten der Tangente des Punktes $\overline{P}_0$ sind die Ausdrücke

$$\overline{A} = \overline{y}'\overline{z}'' - \overline{y}''\overline{z}', \quad \overline{B} = \overline{z}'\overline{x}'' - \overline{z}''\overline{x}', \quad \overline{C} = \overline{x}'\overline{y}'' - \overline{x}''\overline{y}'$$

maßgebend, die die folgende Gestalt haben:

$$\text{(3.)} \qquad \overline{A} = \frac{\alpha\delta^2}{v^3}(Ax + By + Cz), \quad \overline{B} = \frac{\beta\delta^2}{v^3}(Ax + By + Cz),$$
$$\overline{C} = \frac{\gamma\delta^2}{v^3}(Ax + By + Cz).$$

Gelten die in der vorigen Nummer formulierten Voraussetzungen und ist zunächst wieder $v_0 \neq 0$, so ist

$$\text{Ord } [\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}] = \text{Ord } [Ax + By + Cz],$$

und diese Ordnungszahl ist unmittelbar durch Satz IX bestimmt.

Ist dagegen

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad v_0^{(n+1)} \neq 0,$$

so geben die Gleichungen (3.):

$$\text{Ord}\,[\overline{A},\overline{B},\overline{C}]=p+3-3(n+1)=p-3n.$$

Satz XVIII. Die gegebene Kurve werde auf eine feste Ebene projiziert, wobei der im Endlichen gelegene durch die Ordnungszahlen n, m, p charakterisierte Punkt P_0 die im Endlichen gelegene Projektion $\overline{P}_0$ habe. Für diesen Punkt $\overline{P}_0$ gilt dann folgendes:

1. *Liegt das Zentrum der Projektion nicht in der Schmiegungsebene des Punktes P_0, so ist*

$$\text{Ord}\,[\overline{x}',\overline{y}',\overline{z}']=n,\ \text{Ord}\,[\overline{A},\overline{B},\overline{C}]=m.$$

2. *Liegt das Zentrum der Projektion in der Schmiegungsebene, nicht aber auf der Tangente des Punktes P_0, so ist*

$$\text{Ord}\,[\overline{x}',\overline{y}',\overline{z}']=n,\ \text{Ord}\,[\overline{A},\overline{B},\overline{C}]=p-m+n+1.$$

3. *Liegt das Zentrum der Projektion auf der Tangente des Punktes P_0, ohne mit diesem Punkt zusammenzufallen, so ist*

$$\text{Ord}\,[\overline{x}',\overline{y}',\overline{z}']=m-n+1,\ \text{Ord}\,[\overline{A},\overline{B},\overline{C}]=p-n+2.$$

4. *Fällt das Zentrum der Projektion mit P_0 zusammen, so ist*

$$\text{Ord}\,[\overline{x}',\overline{y}',\overline{z}']=m-2n,\ \text{Ord}\,[\overline{A},\overline{B},\overline{C}]=p-3n.$$

Auf Grund dieses Satzes läßt sich für jede einzelne der 8 Arten von Punkten der Charakter der Projektion $\overline{P}_0$ bestimmen*), und zwar ist dieser Charakter unabhängig davon, ob die Punkte P_0, $\overline{P}_0$ und das Projektionszentrum im Endlichen oder im Unendlichen gelegen sind. In der Tat läßt sich, wenn einige von diesen Punkten oder alle drei im Unendlichen liegen, auf unendlich mannigfaltige Weise eine räumliche Kollineation angeben, welche sie in Punkte überführt, die sich im Endlichen befinden. Durch eine solche Kollineation wird die zur Unterscheidung der vier im Satz XVIII angegebenen Fälle charakteristische Lage des Projek-

*) *Fine* (On the singularities of curves of double curvature. Amer. Journ. of Math. vol. VIII, 1886, p. 156—177), welcher mit den *Grassmann*schen Methoden operiert, gibt außer diesen Projektionen unter anderem die analytische Herleitung aller von *Staudt* angeführten Sätze bei strenger Hervorhebung der Dualität.

tionszentrums nicht geändert. Da andererseits die projizierenden Strahlen in die projizierenden Strahlen und die Projektion in die Projektion übergehen, so ergibt sich die obige Behauptung.

Aus den Teilen 1.—3. des Satzes XVIII ersieht man auch den bekannten Charakter der orthogonalen Projektion eines Kurvenpunktes auf seine Schmiegungs-, rektifizierende und Normalebene*). In der Originalabhandlung, von der die vorliegende Schrift einen Auszug repräsentiert, habe ich, wie in der ersten meiner früheren Arbeiten, diese Projektionen auch durch Einführung eines neuen Koordinatensystems bestimmt, dessen Ebenen mit den genannten Ebenen zusammenfallen, um den Zusammenhang meiner Arbeit mit denjenigen Arbeiten zu zeigen, die von der Parameterdarstellung

$$x=\lambda t^{\alpha}+\lambda' t^{\alpha+1}+\cdots,\quad y=\mu t^{\beta}+\mu' t^{\beta+1}+\cdots,\quad z=\nu t^{\gamma}+\nu' t^{\gamma+1}+\cdots,$$

$$0<\alpha<\beta<\gamma$$

ausgehen; es ergibt sich dann:

$$\alpha=n+1,\quad \beta=m-n+2,\quad \gamma=p-m+3^{**}).$$

Ferner ersieht man aus den Formeln im spezialisierten Koordinatensystem ohne weiteres, wann die Kurve die Schmiegungs-, rektifizierende und Normalebene durchdringt***).

18. Die Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ eines beliebigen Punktes der von den Tangenten der gegebenen Kurve (x, y, z) gebildeten abwickelbaren Fläche

---

*) Auf analytischem Wege bestimmt von *Björling* (Über Raumcurven-Singularitäten. Arch. d. Math. u. Phys. (2) Bd. 8, 1890, S. 83—91), *Meder*, *Mehmke* und *v. Lilienthal*.

**) Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei darauf aufmerksam gemacht, daß den Zahlen n, m, p der vorliegenden Arbeit in meinen früheren Abhandlungen die Zahlen n, $m+1$, $p+1$ entsprechen.

***) Daß, wie *Peano* (Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Torino 1887, p. 100) schreibt, die Kurve im Falle eines Rückkehrpunktes auf derselben Seite der Normalebene bleibt, im Falle einer Rückkehrtangente die rektifizierende Ebene durchdringt und im Falle einer Rückkehrschmiegungsebene auf derselben Seite der Schmiegungsebene bleibt, ist nur für die Normalebene ausnahmslos richtig.

lassen sich mit Hilfe einer zweiten unabhängigen veränderlichen Größe u in der folgenden Form darstellen:

$$\bar{x} = x + ux', \quad \bar{y} = y + uy', \quad \bar{z} = z + uz'.$$

Um die Gestalt dieser Fläche näher zu untersuchen, betrachten wir die Schnittlinie derselben mit der festen Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Für diesen Schnitt bestimmt sich u als Funktion der Veränderlichen t aus der Gleichung

$$u = -\frac{w}{w'},$$

wenn wir der Kürze wegen schreiben:

$$w = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta.$$

Durch einfache Ausrechnung findet man:

$$\bar{x}' = \frac{w}{w'^2}(\beta C - \gamma B), \quad \bar{y}' = \frac{w}{w'^2}(\gamma A - \alpha C), \quad \bar{z}' = \frac{w}{w'^2}(\alpha B - \beta A),$$

$$\bar{A} = \frac{\alpha w^2}{w'^3}\Delta, \quad \bar{B} = \frac{\beta w^2}{w'^3}\Delta, \quad \bar{C} = \frac{\gamma w^2}{w'^3}\Delta,$$

und hieraus:

$$\text{Ord}\,[\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'] = \text{Ord}\,[w] - 2\,\text{Ord}\,[w'] + \text{Ord}\,[\beta C - \gamma B,\ \gamma A - \alpha C, \alpha B - \beta A],$$

$$\text{Ord}\,[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] = 2\ \text{Ord}\,[w] - 3\ \text{Ord}\,[w'] + \text{Ord}\,[\Delta].$$

Setzen wir für die in diesen Gleichungen auftretenden Ordnungszahlen ihre Werte nach den Sätzen VI—VIII ein, wobei wir uns auf im Endlichen gelegene Punkte beschränken, so erhalten wir das folgende Resultat:

Satz XIX. Die Tangentenfläche der gegebenen Kurve werde durch eine feste Ebene E geschnitten, wobei dem im Endlichen gelegenen, durch die Ordnungszahlen n, m, p charakterisierten Punkt P_0 der auf seiner Tangente liegende, ebenfalls im Endlichen befindliche Punkt $\bar{P}_0$ entspreche. Für diesen Punkt $\bar{P}_0$ gilt dann folgendes:

1. *Geht die Ebene E nicht durch den Punkt P_0, so ist*

$$\text{Ord}\,[\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}'] = m - 2n, \quad \text{Ord}\,[\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}] = p - 3n.$$

2. *Geht die Ebene E durch den Punkt P_0, ohne die Tangente dieses Punktes zu enthalten, so ist*

$$\text{Ord}\,[\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}'] = m - n + 1, \quad \text{Ord}\,[\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}] = p - n + 2.$$

3. *Enthält die Ebene E die Tangente des Punktes P_0, ohne mit der Schmiegungsebene desselben identisch zu sein, so ist*

$$\text{Ord}\,[\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}'] = n, \quad \text{Ord}\,[\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}] = p - m + n + 1.$$

4. *Fällt die Ebene E mit der Schmiegungsebene des Punktes P_0 zusammen, so ist*

$$\text{Ord}\,[\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}'] = n, \quad \text{Ord}\,[\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}] = m.$$

Mit Hilfe dieses Satzes sind wir imstande den Charakter des Punktes $\overline{P}_0$ für jede der für den Punkt P_0 sich ergebenden Möglichkeiten zu bestimmen*). Diese Bestimmung gilt, wie man leicht sieht, auch dann, wenn von den in Rede stehenden Elementen einige oder alle im Unendlichen liegen.

Die im Satz XIX auftretenden Ordnungszahlen sind in umgekehrter Reihenfolge dieselben, wie die im Satz XVIII vorkommenden. Es folgt daraus ein interessanter Satz nebst einer bemerkenswerten Spezialisierung, wie sich übrigens auch aus zwei dualistisch entsprechenden Sätzen *v. Staudts* ergibt**).

§ 5.

Rückkehrkante der Polarfläche und Planevolvente.

19. Bezeichnen wir die Ausdrücke, die sich auf die *Rückkehrkante der Polarfläche* beziehen, durch Überstreichen, so gelten für die Ableitung des Bogens und den durch dt dividierten Kontingenz- und Torsionswinkel die Formeln***):

---

*) Die Bestimmung des Charakters der ebenen Schnitte der Tangentenfläche findet sich schon bei *Staudt*; analytisch wird die Frage behandelt von *Fine*, *Björling* und *Lilienthal*. Eine analytische Untersuchung der Gestalt der Tangentenfläche gibt auch *Wölffing* (Das Verhalten einer abwickelbaren Fläche und ihrer Doppelkurve in singulären Punkten ihrer Rückkehrkante. Math. naturw. Mitt. (2.), Bd. 5, 1903, S. 70—77).

**) *Meder*, Bemerkung zu zwei Sätzen *v. Staudts*. Monatsh. für Math. u. Phys. XX, S. 186—188.

***) Vgl. z. B. *Schell*, Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung, 2. Aufl. Leipzig 1898, S. 65—66.

$$(1.) \qquad \bar{s}' = \frac{\varrho\varrho' s'}{TR'}, \quad \bar{\varepsilon}' = \omega', \quad \bar{\omega}' = \varepsilon'.$$

Aus diesen Formeln erkennt man unmittelbar den Charakter eines im Endlichen liegenden Punktes $\bar{P}_0$ der Rückkehrkante der Polarfläche, der einem ebensolchen Punkte P_0 der ursprünglichen Kurve entspricht, wie ich bereits in einer früheren Arbeit gezeigt habe*).

Liegt der Punkt $\bar{P}_0$ nicht auf der Hauptnormale des Punktes P_0, so ist

$$\frac{T_0 R_0'}{s_0'} \neq 0, \quad \varrho_0 \neq 0$$

und daher die Ordnungszahl von $\bar{s}'$ gleich derjenigen von ϱ'.

Satz XX. Liegt sowohl der Punkt P_0 der gegebenen Kurve, als auch der ihm entsprechende $\bar{P}_0$ der Rückkehrkante der Polarfläche im Endlichen und dabei letzterer nicht auf der Hauptnormale des ersteren, so ist $\bar{P}_0$ dann und nur dann ein Rückkehrpunkt, wenn der Radius der Schmiegungskugel im Punkte P_0 einen extremen Wert hat.

Liegt der Punkt P_0 im Endlichen und hat der Radius der Schmiegungskugel für ihn den Wert Null, so ist dieser Radius seinem absoluten Werte nach ein Minimum; ferner wissen wir nach Nr. 14, wann der Krümmungsradius, der ebenfalls den Wert Null hat, sein Zeichen beibehält und wann er es umkehrt. Es muß daher, bei $\varrho_0 = 0$, einem Punkt P_0 von gegebenem Charakter ein Punkt $\bar{P}_0$ von ganz bestimmter Art entsprechen. In der Tat liefert Nr. 15 für diesen Fall

$$\mathrm{Ord}\,[\varrho] = \mathrm{Ord}\left[\frac{TR'}{s'}\right],$$

und es ist daher

$$\mathrm{Ord}\,[\bar{s}'] = \mathrm{Ord}\,[\varrho'] = \mathrm{Ord}\,[\varrho] - 1 = -p + m + 2n - 2.$$

Ziehen wir noch die letzten beiden der Gleichungen (1.) in Betracht, so sehen wir, daß einem Punkt P_0 vom Charakter

$$\mathrm{I}{+}{+}{+}, \ \mathrm{II}{+}{+}{-}, \ \mathrm{III}{+}{-}{+}, \ \mathrm{IV}{+}{-}{-},$$
$$\mathrm{V}{-}{+}{+}, \ \mathrm{VI}{-}{+}{-}, \ \mathrm{VII}{-}{-}{+}, \ \mathrm{VIII}{-}{-}{-}$$

*) *Meder*, Zur Theorie usw. S. 242—243. Infolge des in der Anmerkung S. 100 Gesagten gelten die Resultate nicht mehr, wenn einer der Punkte P_0 und $\bar{P}_0$ oder alle beide im Unendlichen liegen.

ein Punkt $\overline{P}_0$ entspricht, dessen Charakter bzw. durch

$$\text{I}'+++,\ \text{VII}'--+,\ \text{VI}'-+-,\ \text{IV}'+--,$$
$$\text{V}'-++,\ \text{III}'+-+,\ \text{II}'++-,\ \text{VIII}'---$$

bezeichnet wird.

20. Wir gehen jetzt zu den Fällen über, in denen mindestens einer der beiden Punkte P_0 und $\overline{P}_0$ im Unendlichen liegt. Wir nehmen hierbei an, daß diesen beiden Punkten bei einer Kollineation im Endlichen gelegene Punkte Π_0 und $\overline{\Pi}_0$ entsprechen, deren Charakter bzw. durch die Ordnungszahlen n, m, p und n', m', p' bestimmt wird. In allen diesen Fällen ist, da ϱ einen unendlich großen Wert hat, nach Nr. 15

$$\text{Ord}\,[\varrho] = \text{Ord}\left[\frac{TR'}{s'}\right]$$

und daher

$$\text{Ord}\,[\bar{s}'] = \text{Ord}\,[\varrho] - 1.$$

Es möge zunächst der Punkt P_0 im Endlichen liegen.

Ist R_0 nicht unendlich groß, so liegt $\overline{P}_0$ im Unendlichen und hat eine asymptotische Tangente. Wir betrachten zuerst den Fall, daß R_0 endlich und dabei von Null verschieden ist, was nach Nr. 14 nur für Punkte P_0 vom Charakter I$+++$, II$++-$, VII$--+$, VIII$---$ stattfinden kann. Man erhält dann nach Satz XV und den beiden letzten der Formeln (1.):

$$\text{Ord}\,[\bar{s}'] = -p + 2m - n + \varkappa - 1,\ \text{Ord}\,[\bar{\varepsilon}'] = \text{Ord}\,[\omega'] = p - 2m + n,$$
$$\text{Ord}\,[\overline{\omega}'] = \text{Ord}\,[\varepsilon'] = m - 2n.$$

Andererseits ist nach Satz XIII:

(2.) $$\text{Ord}[\bar{s}'] = -n' - 2,\ \text{Ord}\,[\bar{\varepsilon}'] = m' - n' + 1,\ \text{Ord}\,[\overline{\omega}'] = p' - 2m' + n',$$

und man erhält die Gleichungen

$$-n' - 2 = -p + 2m - n + \varkappa - 1,\ m' - n' + 1 = p - 2m + n,$$
$$p' - 2m' + n' = m - 2n,$$

oder

$$n' = p - 2m + n - \varkappa - 1,\quad m' - 2n' = \varkappa,\quad p' - 2m' + n' = m - 2n.$$

Nach Nr. 13 sind für den Punkt $\overline{\Pi}_0$ und daher auch für den Punkt $\overline{P}_0$ Punkt, Tangente und Schmiegungsebene gewöhnliche oder Rückkehrelemente, je nachdem die resp. Zahlen $n', m'-2n', p'-2m'+n'$ gerade oder ungerade sind. Bei geradem $\varkappa$, wenn also R wächst oder abnimmt, entspricht einem Punkte P_0 vom Charakter

$$\text{I}+++,\ \text{II}++-,\ \text{VII}--+,\ \text{VIII}---$$

ein Punkt $\overline{P}_0$, dessen Charakter bezw. durch

$$\text{V}'-++,\ \text{I}'+++,\ \text{VI}'-++,\ \text{II}'++-$$

bezeichnet wird. Ist dagegen $\varkappa$ eine ungerade Zahl, hat also R einen extremen Wert, so ist der Charakter von $\overline{P}_0$:

$$\text{III}'+-+,\ \text{VII}'--+,\ \text{IV}'+--,\ \text{VIII}'---.$$

Es sei jetzt für den im Endlichen liegenden Punkt P_0 der Radius der Schmiegungskugel ϱ wiederum unendlich groß, der Krümmungsradius R dagegen unendlich klein. Dann erhält man aus den Sätzen XV und XIII

$$\begin{aligned}(3.)\quad &\operatorname{Ord}[\bar{s}'] = \operatorname{Ord}[\varrho]-1 = -p+m+2n-2,\\ &\operatorname{Ord}[\bar{\varepsilon}'] = \operatorname{Ord}[\omega'] = p-2m+n,\ \operatorname{Ord}[\overline{\omega}'] = \operatorname{Ord}[\varepsilon'] = m-2n.\end{aligned}$$

Andererseits gelten wiederum die Formeln (2.) und man erhält

$$-n'-2 = -p+m+2n-2,\ m'-n'+1 = p-2m+n,\ p'-2m'+n' = m-2n,$$

oder

$$n' = p-m-2n,\ m'-2n' = -m+3n-1,\ p'-2m'+n' = m-2n.$$

Berechnet man hieraus, wie vorher, für jede der 8 für den Punkt P_0 möglichen Arten, ob diese Zahlen gerade oder ungerade sind, so ergibt sich, daß einem Punkt P_0 vom Charakter

$$\text{I}+++,\ \text{II}++-,\ \text{III}+-+,\ \text{IV}+--,$$
$$\text{V}-++,\ \text{VI}-+-,\ \text{VII}--+,\ \text{VIII}---$$

bzw. ein Punkt $\overline{P}_0$ der nachstehenden Art entspricht:

$$\text{III}'+-+,\ \text{VII}'--+,\ \text{VI}'-+-,\ \text{II}'++-,$$
$$\text{V}'-++,\ \text{I}'+++,\ \text{IV}'+--,\ \text{VIII}'---.$$

Hat der im Endlichen liegende Punkt P_0 einen unendlich großen Krümmungsradius R, so liegt nicht nur der Punkt $\overline{P}_0$, sondern auch seine Tangente im Unendlichen, während seine Schmiegungsebene eine asymptotische Lage hat, da sie mit der Normalebene des Punktes P_0 identisch ist. Dann bleiben die Gleichungen (3.) bestehen, während man andererseits hat:

$$\text{Ord}\,[\bar{s}']=-m'+n'-3,\ \text{Ord}\,[\bar{\varepsilon}']=n',\ \text{Ord}\,[\bar{\omega}']=p'-m'-n'+1.$$

Man erhält

$$n'=p-2m+n,\ m'-2n'=m-3n-1,\ p'-2m'+n'=n$$

und hieraus den Charakter des Punktes $\overline{P}_0$.

21. Befindet sich der Punkt P_0 im Unendlichen, so liegt nach Nr. 12 seine Normalebene und somit auch die mit ihr identische Schmiegungsebene des Punktes $\overline{P}_0$ ganz im Unendlichen, und es gelten nach Satz XIII für diesen Punkt die Gleichungen

$$\text{Ord}\,[\bar{s}']=-p'+m'-4,\ \text{Ord}\,[\bar{\varepsilon}']=n',\ \text{Ord}\,[\bar{\omega}']=m'-2n'.$$

Es habe zunächst die Tangente des Punktes P_0 eine asymptotische Lage. Dann ergeben die Gleichungen (1.) in Verbindung mit den Sätzen XV und XIII:

$$\text{Ord}\,[\bar{s}']=-p+m-n-5,\ \text{Ord}\,[\bar{\varepsilon}']=p-2m+n,\ \text{Ord}\,[\bar{\omega}']=m-n+1,$$

und man erhält die Formeln

$$n'=p-2m+n,\ m'-2n'=m-n+1,\ p'-2m'+n'=n,$$

aus denen man wie vorher den Charakter des Punktes $\overline{P}_0$ findet.

Auf analoge Art und Weise wird unsere Aufgabe in den Fällen gelöst, in denen auch die Tangente von P_0 ganz im Unendlichen liegt. Die Resultate sind aus der Tabelle I ersichtlich. In dieser Tabelle ist alles, was sich auf die Rückkehrkante der Polarfläche bezieht, mit einem Akzent versehen; die Zeichen P, t, S bedeuten Punkt, Tangente und Schmiegungsebene; der Strich —— weist darauf hin, daß der betreffende Fall unmöglich ist.

Tabelle I.

Rückkehrkante der Polarfläche.

Ursprüngl. Kurve.	P im Endlichen.							P im Unendlichen.		
	$\lvert\varrho\rvert$ u. R wachs. od. abn. oder $\lvert\varrho\rvert$ u. R Max. od. Min.	$\lvert\varrho\rvert$ oder R Max. od. Min.	$\varrho = 0$.	$\lvert\varrho\rvert = \infty$, $R = 0$.	$\lvert\varrho\rvert = \infty$, $0 < \lvert R\rvert < \infty$.		$\lvert\varrho\rvert = \infty$, $\lvert R\rvert = \infty$.	t im Endl. S im Endl.	t im Unendl. S im Endl.	t im Unendl. S im Unendl.
					R wachs. od. abnehm.	R Max. od. Min.				
Rückkehrk. d. Polarfl.	P' im Endlichen.			P' im Unendlichen, t' im Endlichen, S' im Endlichen.			P' im Unendl. t' im Unendl. S' im Endl.	P' im Unendlichen, t' im Unendlicher, S' im Unendlichen.		
Ursprüngl. Kurve.	Rückkehrkante der Polarfläche.									
I + + +.	I′ + + +.	V′ − + +.	I′ + + +.	III′ + − +.	V′ − + +.	III′ + − +.	III′ + − +.	III′ + − +.	VI′ − + −.	I′ + + +.
II + + −.	VII′ − − +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	I′ + + +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	II′ + + −.	II′ + + −.
III + − +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	——	——	I′ + + +.	I′ + + +.	I′ + + +.	VI′ − + −.
IV + − −.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	II′ + + −.	——	——	V′ − + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	V′ − + +.
V − + +.	I′ + + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	——	——	II′ + + −.	II′ + + −.	VII′ − − +.	IV′ + − −.
VI − + −.	VII′ − − +.	III′ + − +.	III′ + − +.	I′ + + +.	——	——	VI′ − + −.	VI′ − + −.	III′ + − +.	III′ + − +.
VII − − +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	II′ + + −.	IV′ + − −.	VI′ − + −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	VII′ − − +.
VIII − − −.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	II′ + + −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.

22. Wir wollen noch die Größe $\overline{\Delta}$ für die Rückkehrkante der Polarfläche genauer untersuchen, da man aus dem Vorzeichen dieser Größe auf den Windungssinn der Kurve schließen kann. Zu diesem Zweck müssen wir hinsichtlich der *Frenet-Serret*schen Formeln eine Bemerkung machen.

Bezeichnet man durch α, β, γ mit den resp. Indizes 1, 2, 3 die Richtungskosinus der positiven Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale, so bestehen zwischen diesen Größen die Beziehungen

$$(4.) \qquad \alpha_1' = \frac{\alpha_2 s'}{R}, \quad \alpha_2' = -\frac{\alpha_1 s'}{R} + \frac{\alpha_3 s'}{T}, \quad \alpha_3' = -\frac{\alpha_2 s'}{T}$$

nebst den Gleichungen, die man aus ihnen erhält, wenn man β oder γ anstatt α schreibt. Diese Formeln finden sich in manchen Darstellungen derart verändert, daß die die Größe T enthaltenden Glieder mit dem entgegengesetzten Vorzeichen geschrieben sind. Nach Herrn *Kneser**) sind die *Frenet-Serret*schen Formeln in der obigen Gestalt richtig, wenn man die in ihnen auftretenden Größen s' und R stets mit dem positiven Vorzeichen nimmt, die positive Richtung der Tangente im Berührungspunkt mit der Richtung wachsender Werte von t übereinstimmt, die positive Richtung der Hauptnormale nach dem Krümmungszentrum hin geht und die positive Richtung der Binormale dadurch bestimmt wird, daß die positiven Richtungen der Tangente, Haupt- und Binormale so zueinander liegen, wie die positiven Richtungen der x-, y- und z-Axe, die ihrerseits mit den Richtungen nach Westen, Süden und oben zusammenfallen. Nach unseren Definitionen der positiven Richtungen der Tangenten und Binormalen in zwei benachbarten Punkten der Kurve (Nr. 13) bleiben die *Kneser*schen Voraussetzungen nicht mehr bestehen, sobald t den dem singulären Punkt entsprechenden Wert t_0 überschreitet. Es entsteht nun die Frage, ob und unter welchen Bedingungen wir berechtigt sind, die Formeln (4.) zur Transformation von Ausdrücken zu benutzen, die wir für singuläre Punkte der Kurve untersuchen. Die Antwort auf diese Frage ist leicht. Drücken wir alle in den Formeln (4.) auftretenden Größen als Funktionen von t aus, so gehen diese Formeln in Identitäten über, indem beide Seiten jeder Gleichung in

---

*) *Kneser*, Bemerkungen über die *Frenet-Serret*schen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts und links gewundener Raumcurven. Dieses Journ. Bd. 113, S. 89—101.

dieselbe Funktion von t verwandelt werden, welche einen Faktor in Form einer Quadratwurzel aus einer Funktion von t enthält. Bestimmt man nun bei Änderung von t das Vorzeichen stets entsprechend der analytischen Fortsetzung, so bleiben diese Identitäten für den ganzen Verlauf der Kurve Identitäten; hieraus aber ergibt sich, daß auch die ursprünglichen Formeln (4.) gültig bleiben, wenn man das Vorzeichen der in ihnen auftretenden Glieder stets der analytischen Fortsetzung gemäß bestimmt. Bei Benutzung der Formeln (4.) haben wir daher für einen beliebigen regulären Punkt des betrachteten Kurvenstückes die *Kneser*schen Bedingungen vorauszusetzen und bei Änderung von t das Vorzeichen aller Größen gemäß der analytischen Fortsetzung zu bestimmen.

Die Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ eines Punktes der Rückkehrkante der Polarfläche genügen den Gleichungen

$$(\bar{x}-x)\,\alpha_1+(\bar{y}-y)\,\beta_1+(\bar{z}-z)\,\gamma_1=0, \quad (\bar{x}-x)\,\alpha_2+(\bar{y}-y)\,\beta_2+(\bar{z}-z)\,\gamma_2=R,$$

$$(\bar{x}-x)\,\alpha_3+(\bar{y}-y)\,\beta_3+(\bar{z}-z)\,\gamma_3=\frac{TR'}{s'},$$

in denen α, β, γ die oben angegebene Bedeutung haben. Aus diesen Gleichungen erhält man

$$\bar{x}=x+R\,\alpha_2+\frac{TR'}{s'}\,\alpha_3$$

nebst zwei ähnlichen Ausdrücken für $\bar{y}$ und $\bar{z}$. Durch Differentiation unter Benutzung der *Frenet-Serret*schen Formeln ergibt sich hieraus nach einer Reihe elementarer Umformungen $\bar{\Delta}$ in der Gestalt

$$\bar{\Delta}=\frac{\varrho^3\varrho'^3 s'^6}{RR'^3T^5}, \tag{5.}$$

aus welcher folgt:

$$\mathrm{Ord}\,[\bar{\Delta}]=3\,\mathrm{Ord}\,[\varrho\varrho']+6\,\mathrm{Ord}\,[s']-\mathrm{Ord}\,[RR']-2\,\mathrm{Ord}\,[R']-5\,\mathrm{Ord}\,[T].$$

Ein ungerader Wert der Ordnungszahlen von $\varrho\varrho'$ und RR' bedeutet einen extremen Wert der absoluten Beträge von ϱ und R, ein ungerader Wert der Ordnungszahlen von T und $\bar{\Delta}$ weist darauf hin, daß die gegebene

Kurve, bzw. die Rückkehrkante ihrer Polarfläche ihren Windungssinn umkehrt. Daher der Satz:

Satz XXI. Die Rückkehrkante der Polarfläche kehrt den Sinn ihrer Windung dann und nur dann um, wenn für den entsprechenden Punkt der ursprünglichen Kurve von den folgenden Bedingungen eine oder alle drei erfüllt sind: 1. *Der absolute Wert des Radius der Schmiegungskugel ist ein Extremum;* 2. *der absolute Wert des Krümmungsradius ist ein Extremum;* 3. *die ursprüngliche Kurve kehrt den Sinn ihrer Windung um.*

Sind ϱ und R unendlich groß oder unendlich klein, so haben ihre absoluten Werte ein Maximum, bzw. Minimum; hieraus folgt ein Spezialfall des letzten Satzes:

Satz XXII. Wenn der Punkt $\overline{P}_0$ der Rückkehrkante der Polarfläche mit dem entsprechenden Punkt P_0 der ursprünglichen Kurve zusammenfällt oder im Unendlichen liegt, wobei der Krümmungsradius im Punkte P_0 unendlich klein oder unendlich groß ist, so behält die Rückkehrkante der Polarfläche im Punkte $\overline{P}_0$ den Sinn ihrer Windung bei oder kehrt ihn um, je nachdem die ursprüngliche Kurve im Punkte P_0 ihren Windungssinn beibehält oder umkehrt.

Aus der Formel (5.) folgt noch der bereits früher von mir veröffentlichte Satz:

Satz XXIII. Der Sinn der Windung in einem Punkt $\overline{P}_0$ der Rückkehrkante der Polarfläche stimmt mit dem Sinn der Windung der ursprünglichen Kurve im entsprechenden Punkt P_0 überein, wenn im Punkt P_0 der Radius der Schmiegungskugel und der Krümmungsradius, ihrem absoluten Werte nach, gleichzeitig zunehmen oder gleichzeitig abnehmen; er ist ihm entgegengesetzt, wenn der eine dieser beiden Radien zu-, der andere abnimmt.

Es könnte den Anschein haben, als hätte man die Gleichung (5.) unmittelbar aus den Formeln (1.) mit Hilfe der Relationen

$$\bar{\varepsilon}' = \frac{\sqrt{\overline{A}^2 + \overline{B}^2 + \overline{C}^2}}{\bar{s}'^2}, \quad \bar{\omega}' = \frac{\bar{s}'\,\overline{\Delta}}{\overline{A}^2 + \overline{B}^2 + \overline{C}^2}$$

herleiten können. Es ist jedoch hierzu zu bemerken, daß bei der Ableitung

der Formeln (1.) überhaupt nicht auf das Vorzeichen der in ihnen auftretenden Größen geachtet ist. Daher wüßten wir nicht, ob die Formel (5.) richtig wäre, oder ob wir auf der rechten Seite das Zeichen — hinzuzufügen hätten. Im letzteren Falle wäre der Satz XXIII falsch. Die Sätze XXI und XXII indessen hätte man auch erhalten können, ohne zu wissen, mit welchem Zeichen die rechte Seite der Gleichung (5.) zu nehmen ist.

23. Wir gehen jetzt zur Betrachtung der *Planevolvente* der gegebenen Kurve über. Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte der gegebenen Kurve durch x, y, z, die der entsprechenden Punkte der Planevolvente durch $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, so bestehen, da der Punkt $\bar{P}$ in der Schmiegungsebene des Punktes P liegt, die Gleichungen

$$(6.)\quad \bar{x} = x + \alpha_1 a + \alpha_2 b,\ \bar{y} = y + \beta_1 a + \beta_2 b,\ \bar{z} = z + \gamma_1 a + \gamma_2 b,$$

in denen a und b die Koordinaten des Punktes $\bar{P}$ bezogen auf das System der Tangente und Hauptnormale in der Schmiegungsebene des Punktes P sind. Es ergibt sich, daß a und b den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$(7.)\qquad s' + a' - \varepsilon' b = 0,\ \varepsilon' a + b' = 0,$$

aus denen man nach bekannten Methoden findet:

$$(8).\qquad a = u\cos\varepsilon + v\sin\varepsilon,\ b = -u\sin\varepsilon + v\cos\varepsilon,$$

wobei u und v aus den Gleichungen

$$(9.)\qquad u' + s'\cos\varepsilon = 0,\ v' + s'\sin\varepsilon = 0$$

zu berechnen sind, also die folgenden Ausdrücke bezeichnen:

$$(10.)\qquad u = -\int s'\cos\varepsilon\, dt + C_1,\ v = -\int s'\sin\varepsilon + C_2.$$

Der Winkel ε in diesen Formeln bedeutet den Winkel zwischen der

Tangente des Punktes P und einer in der beweglichen Schmiegungsebene von P liegenden, mit dieser fest verbundenen Geraden. Die geometrische Bedeutung der übrigen Größen wird durch Fig. 1 illustriert, in welcher PT und PN Tangente und Hauptnormale des Punktes P, $\overline{P}\overline{B}$ und $\overline{P}\overline{N}$ Binormale und Hauptnormale des Punktes $\overline{P}$ darstellen.

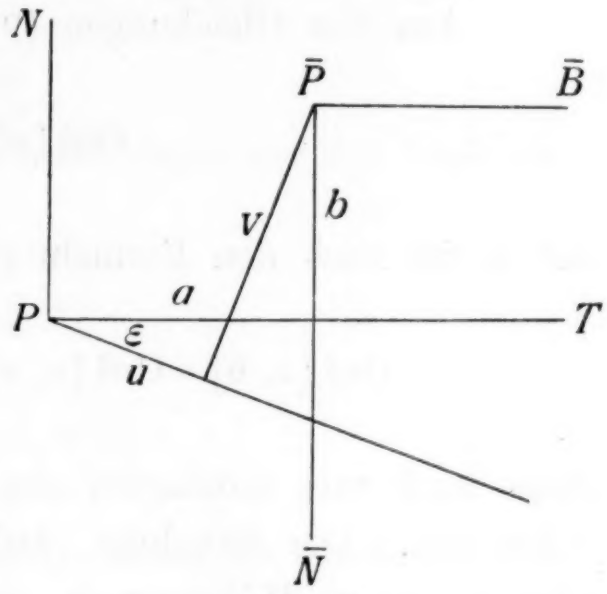

Fig. 1

Aus den Gleichungen (6.) und daraus, daß die gegebene Kurve die Rückkehrkante der Polarfläche ihrer Planevolvente ist, folgen die Formeln:

$$(11.)\quad \bar{s}' = \omega' b,\ \bar{\varepsilon}' = \omega',\ \bar{\omega}' = \varepsilon'.$$

Da für ein im Endlichen gelegenes Stück der gegebenen Kurve die Ausdrücke (10.) keinen unendlich großen Wert haben können, so entspricht einem im Endlichen gelegenen Punkt der gegebenen Kurve stets ein ebensolcher Punkt der Planevolvente, was auch mit Nr. 20 und Nr. 21 im Einklang steht. Dies gibt im Zusammenhang mit den Formeln (11.) den folgenden Satz:

Satz XXIV. Einem im Endlichen gelegenen Punkt P_0 der gegebenen Kurve entspricht ein gleichfalls im Endlichen liegender $\overline{P}_0$ der Planevolvente. Letzterer ist dann und nur dann ein Rückkehrpunkt, wenn an der betrachteten Stelle der Punkt $\overline{P}$ in der Schmiegungsebene des Punktes P die Tangente von P überschreitet, oder wenn P_0 eine Rückkehrschmiegungsebene hat, nicht aber, wenn beides gleichzeitig eintritt. Der Punkt $\overline{P}_0$ hat dann und nur dann eine Rückkehrtangente, wenn die Schmiegungsebene des Punktes P_0 eine Rückkehrschmiegungsebene ist, dann und nur dann eine Rückkehrschmiegungsebene, wenn die Tangente des Punktes P_0 eine Rückkehrtangente ist.

24. Da die Resultate, die sich bei genauerer Untersuchung der Formeln (11.) ergeben, eine Umkehrung der für die Rückkehrkante der Polarfläche gefundenen bilden, so gebe ich nur die tabellarische Zusammenstellung derselben. Bloß der Fall, in welchem die Schmiegungsebene des Punktes P_0 im Unendlichen liegt, bedarf einer genaueren Besprechung.

Wir nehmen hierbei an, daß den Punkten P_0 und $\overline{P}_0$ bei einer Kollineation die im Endlichen liegenden und durch die Ordnungszahlen $n, m, p,$ bzw. n', m', p' charakterisierten Punkte Π_0 und $\overline{\Pi}_0$ entsprechen.

Aus den Gleichungen (9.) folgt

$$\text{Ord}\,[u', v'] = \text{Ord}\,[s'] < 0,$$

und es ist nach den Formeln (8.)

$$\text{Ord}\,[a, b] = \text{Ord}\,[u, v] = \text{Ord}\,[u', v'] + 1 = \text{Ord}\,[s'] + 1.$$

Dann muß zum mindesten eine der Zahlen Ord $[a]$, Ord $[b]$ dieser Größe gleich sein. Die Annahme, daß dies für die Ordnungszahl von b zutrifft, führt zu einem Widerspruch, wir müssen daher haben:

$$\text{Ord}\,[a] = \text{Ord}\,[s'] + 1,$$

und die zweite der Gleichungen (7.) gibt uns in Verbindung mit Satz XIII:

$$\text{Ord}\,[b'] = \text{Ord}\,[s'] + \text{Ord}\,[\varepsilon'] + 1 = -p + m + n - 3;$$

da dieser Wert negativ ist, so folgern wir hieraus:

$$\text{Ord}\,[b] = -p + m + n - 2.$$

Für den Punkt $\overline{P}_0$ der Planevolvente erhält man aus den Gleichungen (11.) und Satz XIII:

$$\text{Ord}\,[\bar{s}'] = \text{Ord}\,[\omega'] + \text{Ord}\,[b] = -p + 2m - n - 2,$$

$$\text{Ord}\,[\bar{\varepsilon}'] = \text{Ord}\,[\omega'] = m - 2n,$$

$$\text{Ord}\,[\overline{\omega}'] = \text{Ord}\,[\varepsilon'] = n.$$

Je nach der Lage seiner Tangente und Schmiegungsebene ergibt sich hieraus für n', m', p':

$$
\begin{array}{lll}
n'=p-2m+n, & m'-2n'=-p+3m-3n-1, & p'-2m'+n'=n, \\
(12.)\ n'=m-2n, & m'-2n'=p-3m+3n-1, & p'-2m'+n'=-p+3m-2n, \\
n'=m-2n, & m'-2n'=n, & p'-2m'+n'=p-3m+2n-2,
\end{array}
$$

und hieraus der Charakter des Punktes $\overline{P}_0$.

25. Wir haben in den letzten Entwickelungen aus der Ungleichung

$$\text{Ord}\,[u', v'] < 0$$

die Folgerung gezogen, daß

$$\text{Ord}\,[u, v,] = \text{Ord}\,[u', v'] + 1$$

ist. Diese Folgerung ist nur dann berechtigt, wenn die Größe Ord $[u, v]$ wirklich existiert, d. h. wenn die Ausdrücke $1:u$, $1:v$ nach ganzen steigenden positiven Potenzen von $t-t_0$ entwickelbar sind. Aus den Gleichungen (10.) ist ersichtlich, daß dies nicht immer der Fall sein wird, da bei der Ausrechnung der Integrale sich logarithmische Glieder ergeben können. Wenn indessen die Größen $1:u$ und $1:v$ in konvergente, nach Potenzen von $t-t_0$ fortschreitende Reihen entwickelt werden können, so ist, infolge der Gleichungen (8.), dasselbe mit den Ausdrücken $1:a$ und $1:b$ der Fall. Wenn Ord $[a]$ und Ord $[b]$ nicht existieren, so weist das darauf hin, daß der Punkt $\overline{P}_0$ der Planevolvente zu keiner der von uns betrachteten acht Arten gehört, sondern irgendeine andere Singularität besitzt.

Daß es in der Tat derartige Punkte $\overline{P}_0$ gibt, folgt aus den Formeln (12.). Nach Satz V, 1, der sowohl für n, m, p, als auch für n', m', p' gilt, ziehen die Gleichungen (12.) bzw. die folgenden Ungleichungen nach sich:

$$
\begin{array}{ll}
(13.) & -p+3m-3n-1 \geqq 0, \\
(14.) & p-3m+3n-1 \geqq 0, \quad -p+3m-2n \geqq 0, \\
(15.) & p-3m+2n-2 \geqq 0,
\end{array}
$$

der Wert $p=3m-3n$ genügt aber keiner einzigen der Bedingungen (13.), (14.) oder (15.).

Tabelle II.

Planevolvente.

Ursprüngl. Kurve.	P im Endlichen.			P im Unendlichen, t im Endlichen, S im Endlichen.	P im Unendl. t im Unendl. S im Endl.	P im Unendlichen, t im Unendlichen, S im Endlichen.		
Planevolvente.	P' im Endlichen.					P' im Unendl. t' im Endl. S' im Endl.	P' im Unendl. t' im Unendl. S' im Endl.	P' im Unendl. t' im Unendl. S' im Unendl.
	P' nicht auf d. Tang. v. P.	P' a. d. Tang. v. P, ab. nicht mit P zusammenf.	P' mit P zusammenf.	P' nicht auf d. Tang. von P.	P' auf d. Tang. v. P.			
Ursprüngl. Kurve.	Planevolvente.							
I + + +.	I′ + + +.	V′ − + +.	I′ + + +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	III′ + − +.	III′ + − +.	III′ + − +.	I′ + + +.
II + + −.	VII′ − − +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	V′ − + +.	V′ − + +.	II′ + + −.	II′ + + −.
III + − +.	II′ + + −.	II′ + + −.	VI′ − + −.	I′ + + +.	I′ + + +.	I′ + + +.	I′ + + +.	VI′ − + −.	VI′ − + −.
IV + − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	V′ − + +.
V − + +.	I′ + + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	I′ + + +.	V′ − + +.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.
VI − + −.	VII′ − − +.	III′ + − +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	III′ + − +.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	I′ + + +.	III′ + − +.
VII − − +.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	V′ − + +.	VII′ − − +.
VIII − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.

§ 6.

Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche.

26. Die rektifizierenden Ebenen einer Raumkurve umhüllen bekanntlich die rektifizierende Fläche der Kurve, deren geradlinige Erzeugende die rektifizierenden Geraden genannt werden. Wir wollen diejenigen Größen, die sich auf die Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche beziehen, durch Überstreichen bezeichnen. Jedem Punkt P der gegebenen Kurve entspricht ein Punkt $\overline{P}$ der Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche, der auf der durch den Punkt P gehenden rektifizierenden Geraden liegt. Bezeichnet l die Entfernung des Punktes $\overline{P}$ vom Punkte P, q die Entfernung zwischen $\overline{P}$ und der Tangente des Punktes P, τ den Winkel zwischen der rektifizierenden Geraden und der Tangente des Punktes P, so bestehen die Gleichungen*):

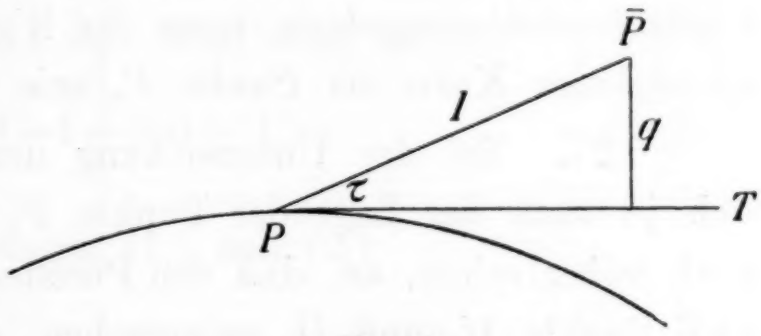

Fig. 2

$$(1.) \qquad l = \frac{s'}{\tau'} \sin \tau, \quad q = l \sin \tau = \frac{s'}{\tau'} \sin^2 \tau, \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{T}{R},$$

und ferner:

$$(2.) \qquad \bar{s}' = \frac{q'}{\sin \tau}, \quad \bar{\varepsilon}' = \tau', \quad \bar{\omega}' = \sqrt{\varepsilon'^2 + \omega'^2}.$$

Da man die erste der Gleichungen (2.) auch in der Form

$$\bar{s}' = \frac{q\, q'\, \tau'^2}{s' \sin^3 \tau \cdot \tau'}$$

schreiben kann, so erhält man den nachstehenden Satz:

Satz XXV. Liegt sowohl der Punkt P_0 der gegebenen Kurve, als auch der ihm entsprechende $\overline{P}_0$ der Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche im Endlichen, so ist letzterer dann und nur dann ein Rückkehrpunkt, wenn von den folgenden Bedingungen eine oder alle drei erfüllt sind: 1. *Der*

*) Vgl. z. B. *Schell*, a. a. O. S. 74—78.

Punkt P_0 ist ein Rückkehrpunkt; **2.** *der absolute Wert der Entfernung des Punktes $\overline{P}$ von der Tangente des Punktes P ist an der betrachteten Stelle ein Maximum oder Minimum;* **3.** *der Kosinus des Winkels zwischen der rektifizierenden Geraden und der Tangente des Punktes P hat an der betrachteten Stelle einen extremen Wert.*

Der Punkt $\overline{P}_0$ hat dann und nur dann eine Rückkehrtangente, wenn der Winkel zwischen der rektifizierenden Geraden und der Tangente des Punktes P im Punkte P_0 einen extremen Wert hat, dann und nur dann eine Rückkehrschmiegungsebene, wenn der Winkel der ganzen Krümmung der ursprünglichen Kurve im Punkte P_0 sein Vorzeichen umkehrt.

27. Bei der Untersuchung der verschiedenen Möglichkeiten, die sich je nach der Lage der Punkte P_0 und $\overline{P}_0$ ergeben, nehmen wir, wie auch früher schon, an, daß den Punkten P_0 und $\overline{P}_0$ bei einer Kollineation zwei Punkte Π_0 und $\overline{\Pi}_0$ entsprechen, die im Endlichen liegen und durch die Ordnungszahlen n, m, p, bzw. n', m', p' charakterisiert sind.

Es habe zunächst $\operatorname{tg}\tau_0$ einen von Null verschiedenen und endlichen Wert, so daß der Punkt $\overline{P}_0$ weder auf der Tangente, noch auf der Binormale des Punktes P_0 liegt, es sei denn, daß die beiden Punkte zusammenfallen. Es ist dann:

$$\operatorname{Ord}[\operatorname{tg}\tau] = \operatorname{Ord}[\sin\tau] = \operatorname{Ord}[\cos\tau] = \operatorname{Ord}[T] - \operatorname{Ord}[R] = 0.$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$\operatorname{Ord}[\tau'] = \lambda, \quad \operatorname{Ord}[q'] = \mu,$$

wobei λ als Ordnungszahl des durch dt dividierten Kontingenzwinkels der Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche keinen negativen Wert annehmen kann, so ergeben die Gleichungen (1.) und (2.):

$$\operatorname{Ord}[q] = \operatorname{Ord}[s'] - \operatorname{Ord}[\tau'] + 2\operatorname{Ord}[\sin\tau] = \operatorname{Ord}[s'] - \lambda;$$

$$(3.) \quad \begin{cases} \operatorname{Ord}[\bar{s}'] = \operatorname{Ord}[q'] - \operatorname{Ord}[\sin\tau] = \mu, \quad \operatorname{Ord}[\bar{\varepsilon}'] = \operatorname{Ord}[\tau'] = \lambda, \\ \operatorname{Ord}[\overline{\omega}'] = \operatorname{Ord}[\varepsilon', \omega'] = \operatorname{Ord}[\varepsilon'] = \operatorname{Ord}[\omega']. \end{cases}$$

Ist dagegen $\operatorname{tg}\tau_0 = 0$, so daß die rektifizierende Gerade und die Tangente des Punktes P_0 zusammenfallen, so ergibt die letzte der Gleichungen (1.):

$$\operatorname{Ord}[\operatorname{tg}\tau] = \operatorname{Ord}[\sin\tau] = \operatorname{Ord}[T] - \operatorname{Ord}[R] > 0.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{d\sin\tau}{dt} = \cos\tau \cdot \tau'$$

folgt, da die Ordnungszahl von $\cos\tau$ den Wert Null hat.

$$\operatorname{Ord}[\sin\tau] - 1 = \operatorname{Ord}[\tau'].$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen (1.) und (2.)

$$\operatorname{Ord}[q] = \operatorname{Ord}[s'] + 2\operatorname{Ord}[\sin\tau] - \operatorname{Ord}[\tau'] = \operatorname{Ord}[s'] + \operatorname{Ord}[\sin\tau] + 1;$$

$$(4.)\quad \begin{cases} \operatorname{Ord}[\bar{s}'] = \operatorname{Ord}[q'] - \operatorname{Ord}[\sin\tau], \quad \operatorname{Ord}[\bar{\varepsilon}'] = \operatorname{Ord}[\tau'] = \operatorname{Ord}[\sin\tau] - 1, \\ \operatorname{Ord}[\bar{\omega}'] = \operatorname{Ord}[\varepsilon', \omega'] = \operatorname{Ord}[\omega']. \end{cases}$$

Ist endlich $\operatorname{tg}\tau_0 = \pm\infty$, d. h. fallen die rektifizierende Gerade und die Binormale des Punktes P_0 zusammen, so erhält man

$$\operatorname{Ord}[\operatorname{tg}\tau] = -\operatorname{Ord}[\cos\tau] = \operatorname{Ord}[T] - \operatorname{Ord}[R] < 0,$$
$$\operatorname{Ord}[\cos\tau] - 1 = \operatorname{Ord}[\tau'],$$

$$\operatorname{Ord}[q] = \operatorname{Ord}[s'] - \operatorname{Ord}[\tau'] = \operatorname{Ord}[s'] - \operatorname{Ord}[\cos\tau] + 1;$$

$$(5.)\quad \begin{cases} \operatorname{Ord}[\bar{s}'] = \operatorname{Ord}[q'], \quad \operatorname{Ord}[\bar{\varepsilon}'] = \operatorname{Ord}[\tau'] = \operatorname{Ord}[\cos\tau] - 1, \\ \operatorname{Ord}[\bar{\omega}'] = \operatorname{Ord}[\varepsilon', \omega'] = \operatorname{Ord}[\varepsilon']. \end{cases}$$

Verfährt man mit den Gleichungen (3.)—(5.) ebenso wie im vorigen Paragraphen, so erhält man den gewünschten Charakter von $\bar{P}_0$ für alle nur möglichen Lagen von P_0 und $\bar{P}_0$. Die Resultate sind in der Tabelle III vereinigt, wobei wiederum durch einen Strich die Unmöglichkeit des betreffenden Falles zum Ausdruck gebracht ist.

Tabelle III.

Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche.

A. P im Endlichen.

Ursprüngl. Kurve.	Rektifizierende Gerade weder mit der Tangente, noch mit der Binormale zusammenfallend.						Rektif. Ger. mit der Tangente zusammenf.	Rektifizierende Gerade mit der Binormale zusammenfallend.			
	q zu- od. abnehm.	q Max. od. Min.	τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.	τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.		q zu- od. abnehm.	q Max. od. Min.		
Rückkehrk. d. rektif. Fläche.	P' im Endlichen.				P' im Unendlichen, t' im Endlichen, S' im Endlichen.		P' im Endlichen.				P' im Unendl. t' im Endl. S' im Endl.
	P' u. P nicht zusammenf.		P' u. P zusammenf.				P' u. P zusammenf.	P' u. P nicht zusammenf.		P' u. P zusammenf.	
Ursprüngl. Kurve.	Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche.										
I + + +.	I′ + + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	III′ + − +.	V′ − + +.	I′ + + +.	III′ + − +.	——	——	III′ + − +.	I′ + + +.
II + + −.	——	——	——	——	——	——	II′ + + −.	I′ + + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	V′ − + +.
III + − +.	——	——	——	——	——	——	I′ + + +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.
IV + − −.	II′ + + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	IV′ + − −.	VI′ − + −.	II′ + + −.	IV′ + − −.	——	——	IV′ + − −.	II′ + + −.
V − + +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	I′ + + +.	VII′ − − +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.
VI − + −.	——	——	——	——	——	——	VI′ − + −.	——	——	I′ + + +.	III′ + − +.
VII − − +.	——	——	——	——	——	——	V′ − + +.	——	——	II′ + + −.	IV′ + − −.
VIII − − −.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	II′ + + −.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.

B. P im Unendlichen.

Ursprüngl. Kurve.	t im Endlichen, S im Endlichen.								
	Rekt. Ger. weder m. d. Tang., noch m. d. Binorm. zusammenfallend.		Rektif. Ger. m. d. Tangente zusammenfallend.						Rekt. Ger. m. d. Bin. zusammenf.
			$0 < \|q\| < \infty$.				$q = 0$.		
	τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.	q zu- od. abnehm.	q Max. od. Min.	q zu- od. abnehm.	q Max. od. Min.			
Rückkehrk. d. rektif. Fläche.	P' im Unendlichen, t' im Unendlichen, S' im Endlichen.		P' im Endlichen.		P' im Unendlichen, t' im Endlichen, S' im Endlichen.				
Ursprüngl. Kurve.	Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche.								
I + + +.	——	——	V′ − + +.	I′ + + +.	V′ − + +.	III′ + − +.	III′ + − +.	I′ + + +.	
II + + −.	I′ + + +.	V′ − + +.	——	——	——	——	II′ + + −.	V′ − + +.	
III + − +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	——	——	——	——	I′ + + +.	VI′ − + −.	
IV + − −.	——	——	VI′ − + −.	II′ + + −.	VI′ − + −.	IV′ + − −.	IV + − −.	II′ + + −.	
V − + +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	I′ + + +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	
VI − + −.	——	——	——	——	——	——	VI′ − + −.	III′ + − +.	
VII − − +.	——	——	——	——	——	——	V′ − + +.	IV′ + − −.	
VIII − − −.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	II′ + + −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	

(Fortsetzung umstehend.)

B. P im Unendlichen. (Fortsetzung.)

Ursprüngl. Kurve.	t im Unendlichen, S im Endlichen.				t im Unendlichen, S im Unendlichen.			
	Rekt. Ger. weder m. d. Tang., noch m. d. Binorm. zusammenfallend.		Rekt. Ger. m. d. Tang. zusammenf.	Rekt. Ger. m. d. Bin. zusammenf.	Rekt. Ger. weder m. d. Tang., noch m. d. Binorm. zusammenfallend.		Rekt. Ger. m. d. Tang. zusammenf.	Rekt. Ger. m. d. Bin. zusammenf.
	τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.			τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.		
Rückkehrk. d. rektif. Fläche.	P' im Unendlichen, t' im Unendlichen, S' im Unendlichen.							
Ursprüngl. Kurve.	Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche.							
I + + +.	——	——	III′ + − +.	I′ + + +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.
II + + −.	I′ + + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	I′ + + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	V′ − + +.
III + − +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	——	——	III′ + − +.	I′ + + +.
IV + − −.	——	——	IV′ + − −.	II′ + + −.	——	——	IV′ + − −.	II′ + + −.
V − + +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	——	——	II′ + + −.	IV′ + − −.
VI − + −.	——	——	I′ + + +.	III′ + − +.	——	——	I′ + + +.	III′ + − +.
VII − − +.	——	——	II′ + + −.	IV′ + − −.	III′ + − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.
VIII − − −.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.

28. Zur Bestimmung des Windungssinnes der Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche müssen wir die Determinante $\overline{\Delta}$ berechnen, ohne jedoch dazu die Formeln (2.) benutzen zu können (Nr. 22). Die Koordination $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ genügen den Gleichungen dreier aufeinanderfolgender rektifizierender Ebenen. Formt man diese Gleichungen nach den *Frenet-Serret*schen Formeln um, so erhält man das System

$$(\overline{x}-x)\alpha_2+(\overline{y}-y)\beta_2+(\overline{z}-z)\gamma_2=0, (\overline{x}-x)\alpha_1+(\overline{y}-y)\beta_1+(\overline{z}-z)\gamma_1=q\operatorname{ctg}\tau,$$
$$(\overline{x}-x)\alpha_3+(\overline{y}-y)\beta_3+(\overline{z}-z)\gamma_3=q.$$

Die weitere Ausrechnung ergibt:

$$\overline{\Delta}=\frac{q'^3\omega'\tau'^2}{\sin^3\tau\cos\tau}$$

und nach einigen Umformungen

$$\overline{\Delta}=\frac{q'^2\tau'^4}{\sin^4\tau}\frac{\frac{d}{\overline{dt}}(q^2)}{T\frac{d}{\overline{dt}}(\sin^2\tau)}.$$

Satz XXVI. Die Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche ändert im Punkte $\overline{P}_0$ den Sinn ihrer Windung dann und nur dann, wenn von den folgenden Bedingungen eine oder alle drei erfüllt sind: 1. Der absolute Wert der Entfernung des Punktes $\overline{P}$ von der Tangente des entsprechenden Punktes P der ursprünglichen Kurve ist an der betrachteten Stelle ein Maximum oder Minimum; 2. der absolute Wert des Sinus des Winkels zwischen der rektifizierenden Geraden und der Tangente des Punktes P ist für den Punkt P_0 ein Maximum oder Minimum; 3. die ursprüngliche Kurve kehrt im Punkt P_0 den Sinn ihrer Windung um.

Satz XXVII. Der Sinn der Windung in einem Punkt $\overline{P}_0$ der Rückkehrkante der rektifizierenden Fläche stimmt mit dem Sinn der Windung der ursprünglichen Kurve in dem entsprechenden Punkt P_0 überein, wenn an der betrachteten Stelle die Entfernung des Punktes $\overline{P}$ von der Tangente des Punktes P und der Sinus des Winkels zwischen der rektifizierenden Geraden und der Tangente des Punktes P ihrem absoluten Werte nach gleichzeitig zunehmen oder gleichzeitig abnehmen; er ist ihm entgegengesetzt, wenn die eine von diesen Größen zu-, die andere abnimmt.

§ 7.

Evolute und Evolvente.

29. Es mögen die Größen, die sich auf die gegebene Kurve beziehen, wie gewöhnlich bezeichnet, die zur *Evolute* gehörigen dagegen durch Überstreichen unterschieden werden. Es sei ferner r die Entfernung des Punktes $\overline{P}$ der Evolute von dem Punkte $\overline{\overline{P}}$ der Rückkehrkante der Polarfläche, der demselben Punkte P der gegebenen Kurve entspricht, ϑ der Winkel zwischen der Tangente der Evolute und der Binormale des entsprechenden Punktes der gegebenen Kurve, für den bekanntlich die Gleichung

$$\vartheta' = \omega' \tag{1.}$$

gilt. Dann bestehen die Gleichungen *):

$$\bar{s}' = \frac{r\omega'}{\sin\vartheta}, \quad \bar{\varepsilon}' = \varepsilon' \sin\vartheta, \quad \bar{\omega}' = \varepsilon' \cos\vartheta. \tag{2.}$$

Betrachten wir zunächst die erste von diesen Gleichungen. Wenn $\sin\vartheta_0 \neq 0$ ist, d. h. wenn die Tangente des Punktes $\overline{P}_0$ nicht mit der Binormale des Punktes P_0 zusammenfällt, so ist

$$\text{Ord}\,[\bar{s}'] = \text{Ord}\,[r] + \text{Ord}\,[\omega'];$$

fallen aber diese beiden Geraden zusammen, so ist $\sin\vartheta_0 = 0$, $\cos\vartheta_0 = 1$, und es folgt aus der Gleichung

$$\frac{d\sin\vartheta}{dt} = \cos\vartheta \cdot \vartheta'$$

in Verbindung mit der Formel (1.):

$$\text{Ord}\,[\sin\vartheta] - 1 = \text{Ord}\,[\omega'] \tag{3.}$$

und hieraus

$$\text{Ord}\,[\bar{s}'] = \text{Ord}\,[r] - 1.$$

Satz XXVIII. Es möge sowohl der Punkt P_0 der gegebenen Kurve, als auch der ihm entsprechende $\overline{P}_0$ der Evolute im Endlichen liegen; es sei ferner $\overline{\overline{P}}_0$ der entsprechende Punkt der Rückkehrkante der Polarfläche der ursprünglichen Kurve. Fällt dann die Tangente des Punktes $\overline{P}_0$ nicht mit der Binormale des Punktes P_0 zusammen, so ist der Punkt $\overline{\overline{P}}_0$ dann und nur dann ein Rückkehrpunkt, wenn der Punkt $\overline{P}$ im Falle einer gewöhnlichen

*) Vgl. z. B. *Schell*, a. a. O. S. 57—59.

Schmiegungsebene von P_0 auf der Erzeugenden der Polarfläche von der einen Seite des Punktes $\overline{P}_0$ auf die andere hinübergeht, im Falle einer Rückkehrschmiegungsebene von P_0 auf derselben Seite dieses Punktes bleibt. Fällt jedoch die Tangente von $\overline{P}_0$ in die Binormale von P_0, so fallen die Punkte P_0, $\overline{P}_0$, $\overline{\overline{P}}_0$ zusammen, und der Punkt $\overline{P}_0$ ist dann und nur dann ein Rückkehrpunkt, wenn $\overline{P}$ auf der Erzeugenden der Polarfläche auf derselben Seite des Punktes $\overline{\overline{P}}_0$ bleibt.

Die erste der Gleichungen (2.) läßt sich mit Hilfe der Formel

$$r = \frac{TR'}{s'} - R \operatorname{ctg} \vartheta$$

auch in der folgenden Gestalt darstellen:

$$\bar{s}' = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{\sin \vartheta}\right) = \frac{d}{dt} P\overline{P}.$$

Satz XXIX. Wird das Vorzeichen im Ausdruck für die Entfernung zwischen zwei entsprechenden im Endlichen liegenden Punkten P und $\overline{P}$ der gegebenen Kurve und ihrer Evolute entsprechend der analytischen Fortsetzung bestimmt, so hat diese Entfernung für die Punkte P_0 und $\overline{P}_0$ einen extremen Wert, wenn der Punkt $\overline{P}_0$ ein Rückkehrpunkt ist, und umgekehrt.

Aus den beiden letzten Formeln des Systems (2.) folgt:

Satz XXX. Liegen wiederum die Punkte P_0 und $\overline{P}_0$ im Endlichen, so ist die Tangente des Punktes $\overline{P}_0$ dann und nur dann eine Rückkehrtangente, wenn auch P_0 eine Rückkehrtangente hat, oder wenn die Tangente des Punktes $\overline{P}$, unter Beibehaltung des Drehungssinnes um die Tangente von P, durch die Lage der Binormale des Punktes P_0 hindurchgeht, nicht aber, wenn beides gleichzeitig eintritt. Die Schmiegungsebene des Punktes $\overline{P}_0$ ist dann und nur dann eine Rückkehrebene, wenn der Punkt P_0 eine Rückkehrtangente hat, oder wenn die Tangente des Punktes $\overline{P}$, unter Beibehaltung des Drehungssinnes um die Tangente von P, durch die Lage der Hauptnormale des Punktes P_0 hindurchgeht, nicht aber, wenn beides gleichzeitig eintritt.

30. Bei der genaueren Diskussion der Formeln

$$(4.) \qquad \bar{s}' = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{\sin \vartheta}\right), \quad \bar{\varepsilon}' = \varepsilon' \sin \vartheta, \quad \bar{\omega}' = \varepsilon' \cos \vartheta$$

nehmen wir wiederum an, daß den Punkten P_0 und $\overline{P}_0$ im Endlichen liegende, kollinear-verwandte Punkte Π_0 und $\overline{\Pi}_0$ mit den Ordnungszahlen n, m, p und n', m', p' entsprechen.

Es sei zunächst $\sin \vartheta_0$ von 0 und von 1 verschieden, so daß die Tangente des Punktes $\overline{P}_0$ weder mit der Tangente noch mit der Binormale des Punktes P_0 zusammenfällt. In diesem Falle liefern die Formeln (4.):

$$\text{Ord}\,[\bar{\varepsilon}'] = \text{Ord}\,[\overline{\omega}'] = \text{Ord}\,[\varepsilon'],$$

und, falls R_0 einen unendlich kleinen oder unendlich großen Wert hat,

$$\text{Ord}\,[\bar{s}'] = \text{Ord}\,[R] - 1.$$

Ist dagegen $\sin \vartheta_0 = 0$, so daß die Tangente des Punktes $\overline{P}_0$ mit der Binormale des Punktes P_0 zusammenfällt, so haben wir mit Hilfe der Formel (3):

$$\text{(5.)} \qquad \text{Ord}\left[\frac{R}{\sin \vartheta}\right] = \text{Ord}\,[R] - \text{Ord}\,[\omega'] - 1.$$

Aus den Gleichungen (4.) folgt:

$$\text{Ord}\,[\bar{\varepsilon}'] = \text{Ord}\,[\varepsilon'] + \text{Ord}\,[\omega'] + 1, \quad \text{Ord}\,[\overline{\omega}'] = \text{Ord}\,[\varepsilon'],$$

und, wenn der Ausdruck (5.) den Wert Null hat,

$$\text{Ord}\,[\bar{s}'] = \text{Ord}\,[R] - \text{Ord}\,[\omega'] - 2.$$

Ist endlich $\sin \vartheta_0 = 1$, so daß die Tangente des Punktes $\overline{P}_0$ mit der Hauptnormale, die Schmiegungsebene also mit der Schmiegungsebene des Punktes P_0 zusammenfällt, so hat man $\cos \vartheta_0 = 0$ und aus der Gleichung

$$\frac{d \cos \vartheta}{dt} = -\sin \vartheta \cdot \omega'$$

folgt

$$\text{Ord}\,[\cos \vartheta] = \text{Ord}\,[\omega'] + 1.$$

Die Formeln (4.) liefern

$$\text{Ord}\,[\bar{\varepsilon}'] = \text{Ord}\,[\varepsilon'], \quad \text{Ord}\,[\overline{\omega}'] = \text{Ord}\,[\varepsilon'] + \text{Ord}\,[\omega'] + 1,$$

und, wenn

$$\text{Ord}\left[\frac{R}{\sin \vartheta}\right] = \text{Ord}\,[R]$$

gleich Null ist,

$$\text{Ord}\,[\bar{s}'] = \text{Ord}\,[R] - 1.$$

Die genaue Diskussion der abgeleiteten Formeln nach den Methoden der vorhergehenden Paragraphen liefert als Resultat die Tabelle IV.

Tabelle IV.

Evolute.

A. P im Endlichen.

Ursprüngl. Kurve.	Tangente d. Evolute weder m. d. Haupt-, noch m. d. Binorm. zusammenfallend.		Tangente d. Evolute m. d. Binormale zusammenfallend.		Tangente d. Evolute m. d. Hauptnormale zusammenfallend.		Tang. d. Evol. wed. m. d. Haupt-, noch m. d. Bin. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Binorm. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Hauptn. zusammenf.	Tang. d. Evol. wed. m. d. Haupt-, noch m. d. Bin. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Binorm. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Hauptn. zusammenf.
Evolute.	P' im Endlichen.									P' im Unendlichen, t' im Endlichen. S' im Endlichen.		
	P' u. P nicht zusammenfallend.						P' u. P zusammenfallend.					
	PP' zu- od. abnehm.	PP' Max. od. Min.	PP' zu- od. abnehm.	PP' Max. od. Min.	PP' zu- od. abnehm.	PP' Max od. Min.						
Ursprüngl. Kurve.	Evolute.											
I + + +.	I′+ + +.	V′− + +.	———	———	II′+ + −.	VI′− + −.	V′− + +.	III′+ − +.	VI′− + −.	V′− + +.	I′+ + +.	VI′− + −.
II + + −.	I′+ + +.	V′− + +.	I′+ + +.	V′− + +.	I′+ + +.	V′− + +.	V′− + +.	V′− + +.	V′− + +.	V′− + +.	V′− + +.	V′− + +.
III + − +.	———	———	II′+ + −.	VI′− + −.	———	———	IV′+ − −.	VI′− + −.	III′+ − +.	II′+ + −.	VI′− + −.	I′+ + +.
IV + − −.	———	———	———	———	———	———	IV′+ − −.	IV′+ − −.	IV′+ − −.	II′+ + −.	II′+ + −.	II′+ + −.
V − + +.	———	———	III′+ − +.	VII′− − +.	———	———	I′+ + +.	VII′− − +.	II′+ + −.	III′+ − +.	VII′− − +.	IV′+ − −.
VI − + −.	———	———	———	———	———	———	I′+ + +.	I′+ + +.	I′+ + +.	III′+ − +.	III′+ − +.	III′+ − +.
VII − − +.	IV′+ − −.	VIII′− − −.	———	———	III′+ − +.	VII′− − +.	VIII′− − −.	II′+ + −.	VII′− − +.	VIII′− − −.	IV′+ − −.	VII′− − +.
VIII − − −.	IV′+ − −.	VIII′− − −.	IV′+ − −.	VIII′− − −.	IV′+ − −.	VIII′− − −.	VIII′− − −.	VIII′− − −.	VIII′− − −.	VIII′− − −.	VIII′− − −.	VIII′− − −.

B. P im Unendlichen.

Ursprüngl. Kurve.	t im Endlichen, S im Endlichen.			t im Unendlichen, S im Endlichen.			t im Unendlichen, S im Unendlichen.		
	Tang. d. Evol. wed. m. d. Haupt-, noch m. d. Bin. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Binorm. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Hauptn. zusammenf.	Tang. d. Evol. wed. m. d. Haupt-, noch m. d. Bin. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Binorm. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Hauptn. zusammenf.	Tang. d. Evol. wed. m. d. Haupt-, noch m. d. Bin. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Binorm. zusammenf.	Tang. d. Evol. m. d. Hauptn. zusammenf.
Evolute.	P' im Unendlichen, t' im Unendlichen, S' im Endlichen.			P' im Unendlichen, t' im Unendlichen, S' im Unendlichen.		P' im Unendl. t' im Unendl. S' im Endl.	P' im Unendlichen, t' im Unendlichen, S' im Unendlichen.		
Ursprüngl. Kurve.	Evolute.								
I + + +.	V′ − + +.	I′ + + +.	VI′ − + −.	I′ + + +.	I′ + + +.	III′ + − +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	III′ + − +.
II + + −.	V′ − + +.	V′ − + +.	V′ − + +.	I′ + + +.	V′ − + +.	IV′ + − −.	I′ + + +.	V′ − + +.	IV′ + − −.
III + − +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	I′ + + +.	II′ + + −.	VI′ − + −.	I′ + + +.	I′ + + +.	I′ + + +.	I′ + + +.
IV + − −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.
V − + +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	IV′ + − −.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	V′ − + +.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	V′ − + +.
VI − + −.	III′ + − +.	III′ + − +.	III′ + − +.	VII′ − − +.	III′ + − +.	VI′ − + −.	VII′ − − +.	III′ + − +.	VI′ − + −.
VII − − +.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	VII′ − − +.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.
VIII − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.

31. Benutzt man die *Frenet-Serret*schen Formeln unter den Nr. 22 formulierten Voraussetzungen, so ergeben sich die Gleichungen der Evolute in der folgenden Gestalt*):

$$\bar{x}=x+R\alpha_2+R\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\alpha_3,\quad \bar{y}=y+R\beta_2+R\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\beta_3,\quad \bar{z}=z+R\gamma_2+R\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\gamma_3.$$

Führt man zur Abkürzung die Bezeichnung

$$S=\frac{R}{\sin\vartheta}$$

für die Entfernung $P\bar{P}$ ein, so folgt aus diesen Formeln für die Determinante $\bar{\Delta}$:

$$\bar{\Delta}=\frac{s'^3S'^3}{S^3R}\cos\vartheta,$$

oder nach einigen einfachen Umformungen:

$$\bar{\Delta}=\frac{s'^2S'^2}{4S^2R^2}T\frac{d}{dt}(S^2)\frac{d}{dt}(\sin^2\vartheta).$$

Satz XXXI. Die Evolute ändert den Sinn ihrer Windung dann und nur dann, wenn an der betrachteten Stelle von den folgenden Bedingungen eine oder alle drei erfüllt sind: 1. *Der absolute Wert der Entfernung zwischen dem Punkt der Evolute und dem entsprechenden Punkt der ursprünglichen Kurve ist ein Maximum oder Minimum;* 2. *der absolute Wert des Sinus des Winkels zwischen der Tangente der Evolute und der Binormale der ursprünglichen Kurve ist ein Maximum oder Minimum;* 3. *die ursprüngliche Kurve kehrt den Sinn ihrer Windung um.*

Satz XXXII. Der Sinn der Windung in einem Punkt $\bar{P}_0$ der Evolute stimmt mit dem Sinn der Windung der ursprünglichen Kurve in dem entsprechenden Punkt P_0 überein, wenn an der betrachteten Stelle die Entfernung zwischen den Punkten P und $\bar{P}$ und der Sinus des Winkels zwischen der Tangente des Punktes $\bar{P}$ und der Binormale des Punktes P, ihrem abso-

*) *Picard* (Traité d'analyse, t. I. 2. éd. Paris 1901, p. 396—398) kommt auf die Formel

$$\bar{x}=x+R\alpha_2+R\operatorname{tg}\vartheta\cdot\alpha_3,$$

doch ist seine Herleitung nicht einwandfrei, da die beiden Definitionen, die er für die Torsion gibt (S. 390 u. 391), sich durch das Vorzeichen unterscheiden. Vgl. auch *Kneser*, a. a. O. S. 90.

luten Werte nach, gleichzeitig zunehmen oder gleichzeitig abnehmen; er ist ihm entgegengesetzt, wenn die eine von diesen Größen zu-, die andere abnimmt.

32. Zum Schluß unserer Arbeit betrachten wir noch die *Evolvente* der gegebenen Kurve. Bezeichnen wir die Größen, die sich auf die Evolvente beziehen durch Überstreichen, so gelten die Gleichungen*):

$$\bar{s}' = \varepsilon' s, \quad \bar{\varepsilon}' = \sqrt{\varepsilon'^2 + \omega'^2}, \quad \bar{\omega}' = \tau', \tag{6.}$$

wo τ, wie in § 6, der Winkel zwischen der rektifizierenden Geraden und der Tangente der gegebenen Kurve ist und der Bogen s der gegebenen Kurve von dem Punkte an gemessen wird, der mit dem entsprechenden Punkt der Evolvente zusammenfällt. Ein Zeichenwechsel von s durch den Wert Null hindurch tritt daher allemal und nur dann ein, wenn der Punkt der gegebenen Kurve mit dem entsprechenden der Evolvente zusammenfällt, ohne ein Rückkehrpunkt zu sein.

Die Gleichungen (6.) ergeben den folgenden Satz:

Satz XXXIII. Es möge sowohl der Punkt P_0 der gegebenen Kurve, als auch der ihm entsprechende $\bar{P}_0$ der Evolvente im Endlichen liegen. Fallen die Punkte P_0 und $\bar{P}_0$ nicht zusammen, so ist letzterer dann und nur dann ein Rückkehrpunkt, wenn P_0 eine Rückkehrtangente besitzt; fallen dagegen die beiden Punkte zusammen, so ist $\bar{P}_0$ dann und nur dann ein Rückkehrpunkt, wenn für P_0 Punkt und Tangente gleichzeitig gewöhnliche oder gleichzeitig Rückkehrelemente sind. Der Punkt $\bar{P}_0$ hat dann und nur dann eine Rückkehrtangente, wenn der Winkel der ganzen Krümmung der gegebenen Kurve sein Zeichen umkehrt, dann und nur dann eine Rückkehrschmiegungsebene, wenn der Winkel zwischen der rektifizierenden Geraden und der Tangente der ursprünglichen Kurve einen extremen Wert hat.

Ich gebe nur die tabellarische Zusammenstellung der Resultate, die ich bei der Diskussion der Gleichungen (6.) in der Originalarbeit gefunden habe, da diese Resultate, im Grunde genommen, nur eine Umkehrung der für die Evolute abgeleiteten sind. Dies verifiziert sich auch leicht an den Tabellen, wenn man bedenkt, daß der Winkel ϑ in Nr. 29—31 gleich dem Winkel τ in der Tabelle V sein muß, da die rektifizierenden Geraden der ursprünglichen Kurve die Krümmungsachsen ihrer Evolventen sind.

*) Vgl. z. B. *Schell*, a. a. O. S. 42—45.

Tabelle V.

Evolvente.

A. t im Endlichen.

Ursprüngl. Kurve.	P im Endlichen.								P im Unendlichen.			
	Rektif. Gerade weder m. d. Tangente, noch m. d. Binormale zusammenfallend.				Rektif. Gerade m. d. Tangente zusammenfallend.		Rektif. Gerade m. d. Binormale zusammenfallend.		Rekt. Ger. wed. m. d. Tang., noch m. d. Binorm. zus.		Rektif. Ger. m. d. Tang. zusammenf.	Rektif. Ger. m. d. Binorm. zusammenf.
	τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.	τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.					τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.		
Evolvente.	P' im Endlichen.											
	P' und P nicht zusammenf.		P' u. P zusammenf.		P' u. P nicht zusammenf.	P' u. P zusammenf.	P' u. P nicht zusammenf.	P' u. P zusammenf.				
Ursprüngl. Kurve.	Evolvente.											
I + + +.	I′ + + +.	II′ + + −.	V′ − + +.	VI′ − + −.	II′ + + −.	VI′ − + −.	II′ + + −.	VI′ − + −.	——	——	I′ + + +.	III′ + − +.
II + + −.	——	——	——	——	III′ + − +.	VII′ − − +.	I′ + + +.	V′ − + +.	III′ + − +.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.
III + − +.	——	——	——	——	V′ − + +.	I′ + + +.	VII′ − − +.	III′ + − +.	V′ − + +.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.
IV + − −.	VII′ − − +.	VIII′ − − −.	III′ + − +.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	VIII′ − − −.	IV′ + − −.	——	——	VII′ − − +.	V′ − + +.
V − + +.	I′ + + +.	II′ + + −.	I′ + + +.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	I′ + + +.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.
VI − + −.	——	——	——	——	III′ + − +.	III′ + − +.	I′ + + +.	I′ + + +.	——	——	III′ + − +.	I′ + + +.
VII − − +.	——	——	——	——	V′ − + +.	V′ − + +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	——	——	V′ − + +.	VII′ − − +.
VIII − − −.	VII′ − − +.	VIII′ − − −.	VII′ − − +.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VII′ − − +.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.

B. t im Unendlichen.

Ursprüngl. Kurve.	S im Endlichen.				S im Unendlichen.						
	Rekt. Ger. wed. m. d. Tang., noch m. d. Binorm. zus.		Rektif. Ger. m. d. Tang. zusammenf.	Rektif. Gerade m. d. Binormale zusammenf.	Rektif. Gerade weder m. d. Tangente, noch m. d. Binormale zusammenf.				Rektif. Gerade m. d. Tangente zusammenf.		Rektif. Ger. m. d. Bin. zusammenf.
	τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.			τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.	τ zu- od. abnehm.	τ Max. od. Min.			
Evolvente.	P' im Unendlichen, t' im Endlichen, S' im Endlichen.			P' im Unendlichen, t' im Unendlichen, S' im Endlichen.	P' im Unendl. t' im Unendl. S' im Unendl.				P' im Unendl. t' im Unendl. S' im Endl.		P' im Unendl. t' im Unendl. S' im Unendl.
Ursprüngl. Kurve.	Evolvente.										
I + + +.	——	——	I′ + + +.	III′ + − +.	III′ + − +.	II′ + + −.	I′ + + +.	II′ + + −.	III′ + − +.	I′ + + +.	III′ + − +.	III′ + − +.
II + + −.	III′ + − +.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	III′ + − +.	IV′ + − −.	I′ + + +.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.	IV′ + − −.
III + − +.	V′ − + +.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	VI′ − + −.	I′ + + +.	——	——	——	——	VI′ − + −.	VI′ − + −.	I′ + + +.
IV + − −.	——	——	VII′ − − +.	V′ − + +.	II′ + + −.	——	——	——	——	VII′ − − +.	V′ − + +.	II′ + + −.
V − + +.	I′ + + +.	II′ + + −.	II′ + + −.	II′ + + −.	V′ − + +.	——	——	——	——	II′ + + −.	II′ + + −.	V′ − + +.
VI − + −.	——	——	III′ + − +.	I′ + + +.	VI′ − + −.	——	——	——	——	III′ + − +.	I′ + + +.	VI′ − + −.
VII − − +.	——	——	V′ − + +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.	VI′ − + −.	V′ − + +.	VI′ − + −.	VII′ − − +.	V′ − + +.	VII′ − − +.	VII′ − − +.
VIII − − −.	VII′ − − +.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VII′ − − +.	VIII′ − − −.	V′ − + +.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.	VIII′ − − −.

Zur Theorie der Kreispunktpolarkurven.

Von Herrn *R. Neuendorff* in Kiel.

I.

Im „Lehrbuch der analytischen Geometrie“ von *L. Heffter* und *C. Koehler*, I. Bd. (Leipzig, 1905) S. 438 f. ist zu den bekannten ausgezeichneten Durchmesserpaaren eines Kegelschnittes noch ein weiteres hinzugefügt worden: das Paar der stets imaginären *Kreispunktpolaren*, d. h. die Polaren der unendlich fernen Kreispunkte in bezug auf diesen Kegelschnitt. Die durch die Kreispunktpolaren der *Dupin*schen Indikatrix auf einer Fläche bestimmten Kurven sollen *Kreispunktpolarkurven* genannt werden.

Da jede Kreispunktpolare mit der uneigentlichen Geraden und einem absoluten Durchmesser ein Polardreieck bildet, den absoluten Durchmessern der Indikatrix aber die durch den zugehörigen Flächenpunkt gehenden Minimalkurven entsprechen, so müssen die Fortschreitungsrichtungen der Kreispunktpolarkurven zu denen der Minimalkurven konjugiert sein.

Ist daher auf einer Fläche die Differentialgleichung der Minimalkurven

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=0,$$

so bestehen in einem beliebigen Flächenpunkt für die Fortschreitungsrichtungen $dv_1:du_1$ und $dv_2:du_2$ dieser Kurven die Beziehungen

$$du_1\,du_2:(du_1\,dv_2+dv_1\,du_2):dv_1\,dv_2=G:(-2F):E.$$

Die zu diesen Richtungen konjugierten seien bestimmt durch die Gleichungen

$$L\,du_1\,du + M\,(du_1\,dv + dv_1\,du) + N\,dv_1\,dv = 0,$$
$$L\,du_2\,du + M\,(du_2\,dv + dv_2\,du) + N\,dv_2\,dv = 0,$$

oder zu einer Gleichung zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} &du^2\,[L^2\,du_1\,du_2 + LM\,(du_1\,dv_2 + dv_1\,du_2) + M^2\,dv_1\,dv_2] \\ &+ du\,dv\,[2\,LM\,du_1\,du_2 + (LN + M^2)\,(du_1\,dv_2 + dv_1\,du_2) + 2\,MN\,dv_1\,dv_2] \\ &+ dv^2\,[M^2\,du_1\,du_2 + MN\,(du_1\,dv_2 + dv_1\,du_2) + N^2\,dv_1\,dv_2] = 0. \end{aligned}$$

Dann lautet die *Differentialgleichung der Kreispunktpolarkurven*

$$(1.)\quad \begin{cases} du^2\,(GL^2 - 2\,FLM + EM^2) + 2\,du\,dv\,[GLM - F\,(LN + M^2) + EMN] \\ \qquad + dv^2\,(GM^2 - 2\,FMN + EN^2) = 0. \end{cases}$$

Sind insbesondere die Krümmungskurven Parameterlinien der Fläche, so wird daraus

$$(2.)\qquad GL^2\,du^2 + EN^2\,dv^2 = 0.$$

Die Kreispunktpolarkurven sind Parameterlinien auf einer Fläche, wenn zwischen den Fundamentalgrößen die folgenden Beziehungen bestehen:

$$(3.)\qquad \frac{E}{L} = \frac{G}{N} = \frac{2\,FM}{LN + M^2};$$

dabei ist nur abzusehen von $LN - M^2 = 0$, d. h. von abwickelbaren Flächen, auf denen die Kreispunktpolarkurven mit den zusammenfallenden geradlinigen Erzeugenden identisch sind.

Die Kreispunktpolarkurven scheinen zum ersten Male systematisch, besonders im Anschluß an die Kreispunktpolaren, in meiner Dissertation*) untersucht worden zu sein. Ihre dort hergeleiteten wichtigsten Eigenschaften sind:

ihre sphärische Abbildung sind die Minimalkurven der *Gauß*schen Kugel;

---

*) Über Kreispunktpolarkurven. Diss. Kiel 1908. Daselbst findet sich auch genaue Literaturangabe. (Im folgenden kurz zitiert „Diss.“)

der Winkel unendlich benachbarter Normalen längs der Kurven (das Winkelelement) ist von höherer Ordnung unendlich klein als das Linienelement der Fläche;

die Krümmungsradien in den beiden Normalschnitten längs der Kurven sind in jedem Flächenpunkte einander gleich und zwar gleich der Summe der Hauptkrümmungsradien in diesem Flächenpunkte;

die beiden von einem Flächenpunkte ausgehenden Kurven besitzen gleiche dem Vorzeichen nach entgegengesetzte geodätische Torsion*).

In meiner Dissertation habe ich dann hauptsächlich das Verhalten der Kurven bei einer punktweisen Abbildung zweier Flächen aufeinander,

---

*) Da diese Eigenschaft in meiner Dissertation nicht erwähnt ist, soll sie hier kurz bewiesen werden.

Wählt man die Krümmungskurven als Parameterlinien, $M=F=0$, so ist die geodätische Torsion einer Flächenkurve (vergl. z. B. *Bianchi*, Vorlesungen über Differentialgeometrie; deutsch von *Lukat* (Leipzig, 1899.) S. 165):

$$\frac{1}{T_g} = \frac{(GL-EN)\,du\,dv}{\sqrt{EG}(E\,du^2+G\,dv^2)}.$$

Nach (2.) sind die Fortschreitungsrichtungen der Kreispunktpolarkurven

$$dv:du = \mp L\sqrt{G}:iN\sqrt{E}.$$

Dies gibt eingesetzt:

$$\frac{1}{T_g} = \pm\frac{iLN}{GL+EN}.$$

Dabei ist abgesehen von $EN-GL=0$. Da in unserm Falle die Hauptkrümmungsradien die Werte besitzen

$$R_1 = \frac{E}{L}, \quad R_2 = \frac{G}{N},$$

so bedeutet die Ausnahme, daß $R_1-R_2=0$, d. h., daß die Fläche eine Kugel ist. In allen andern Fällen ergibt sich

$$\frac{1}{T_g} = \pm\frac{i}{R_1+R_2}.$$

sowie einige Fälle, in denen die Differentialgleichungen der Kreispunktpolarkurven durch Quadratur integrierbar sind, nach den Methoden von *Lie**) untersucht.

In der folgenden Arbeit leite ich die beiden ersten Fundamentalgleichungen her für Flächen, auf denen die Kreispunktpolarkurven Parameterlinien sind, woraus sich unmittelbar die Bestimmung der Flächen ergibt, auf denen jene Kurven äquidistant sind. Weiter bestimme ich diejenigen Flächen, auf denen die Kreispunktpolarkurven geodätische Linien sind.

II.

Bezeichnet man mit R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien auf einer Fläche und bezieht man diese Fläche auf die Kreispunktpolarkurven als Parameterlinien, so bestehen die Gleichungen**)

$$\frac{E}{L}=\frac{G}{N}=\frac{2FM}{LN+M^2}=R_1+R_2. \tag{4.}$$

Die zweite Fundamentalgröße der *Gauß*schen Einheitskugel erhält den Wert

$$\mathfrak{F}=\frac{1}{EG-F^2}(EMN-FLN-FM^2+GLM)=2M\frac{L}{E}.$$

Also ist

$$\frac{M}{\mathfrak{F}}=\frac{R_1+R_2}{2}, \tag{5.}$$

während die beiden andern Fundamentalgrößen $\mathfrak{G}=\mathfrak{E}=0$ sind.

Die beiden ersten Fundamentalgleichungen der Flächentheorie sind, wenn man die *Christoffel*schen Symbole abgeleitet für die *Gauß*sche Kugel benutzt, diese***):

---

*) *Lie-Scheffers*, Vorlesungen über Differentialgleichungen (Leipzig, 1891.) S. 162 ff.

**) Diss. S. 9 f.

***) Vergl. *Bianchi*, Vorlesungen über Differentialgeometrie; deutsch von *Lukat* (Leipzig, 1899.) S. 123.

$$\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}L+\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]M+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}N=0\,.$$

$$\frac{\partial N}{\partial u}-\frac{\partial M}{\partial v}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}L+\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]M-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}N=0\,.$$

Daraus wird in unserm Falle

$$\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}+M\frac{\partial \log \mathfrak{F}}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial u}-\frac{\partial M}{\partial v}+M\frac{\partial \log \mathfrak{F}}{\partial v}=0,$$

oder nach (5.)

$$(6.)\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{M}\dfrac{\partial L}{\partial v}=\dfrac{\partial \log (R_1+R_2)}{\partial u},\\[2ex] \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial N}{\partial u}=\dfrac{\partial \log (R_1+R_2)}{\partial v}.\end{cases}$$

Das Ergebnis ist also:

Sind auf einer Fläche die Kreispunktpolarkurven Parameterlinien und sieht man von abwickelbaren Flächen ab, so können die beiden ersten Fundamentalgleichungen auf die Form gebracht werden:

$$\frac{1}{M}\frac{\partial L}{\partial v}=\frac{\partial \log (R_1+R_2)}{\partial u},\qquad \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial u}=\frac{\partial \log (R_1+R_2)}{\partial v}.$$

III.

Es sollen die Flächen bestimmt werden, auf denen die Kreispunktpolarkurven äquidistant sind. Hat man diese als Parameterlinien gewählt, so kann man geeignete Funktionen so als Parameter einführen, daß $E=G=1$ wird.

Setzt man zur Abkürzung $R_1+R_2=\lambda$, so wird nach (4.)

$$L=N=\frac{1}{\lambda}$$

und nach (6.)

$$(7.) \qquad -\frac{1}{M}\frac{\lambda_v}{\lambda}=\lambda_u, \qquad -\frac{1}{M}\frac{\lambda_u}{\lambda}=\lambda_v.$$

Abgesehen ist von $\lambda=0$, d. h. von Minimalflächen, auf denen die Kreispunktpolarkurven mit den Minimalkurven zusammenfallen, also sicher nicht im eigentlichen Sinne äquidistant sind.

Setzt man $\lambda_v \neq 0$ und $\lambda_u \neq 0$ voraus und multipliziert die Gleichungen (7.) miteinander, so folgt

$$M^2=\frac{1}{\lambda^2} \quad \text{und nach (4.)} \quad F^2=1.$$

Folglich wäre $EG-F^2=0$, d. h. die Fläche Tangentenfläche einer Minimalkurve. Dabei fallen aber die Kreispunktpolarkurven zusammen, sind also sicher nicht äquidistant. Demnach bleibt nur

$$\lambda_v=\lambda_u=0 \quad \text{und folglich} \quad R_1+R_2=\text{ konst.}$$

Setzt man umgekehrt $R_1+R_2=\text{konst.}=a$, so folgt aus (6.), da $\frac{1}{M}\neq 0$ ist, $L=U, N=V$, wo U und V Funktionen von u bezw. v allein bedeuten. Weiter ergibt sich aus (4.) $E=aU$, $G=aV$, so daß das Linienelement der Fläche wird:

$$ds^2=aU\,du^2+2F\,du\,dv+aV\,dv^2.$$

Führt man, ohne die Parameterkurven zu ändern, die neuen Parameter ein

$$du_1=du\sqrt{aU}, \quad dv_1=dv\sqrt{aV},$$

so erhält das Linienelement die Form

$$ds^2=du_1^2+2F_1\,du_1\,dv_1+dv_1^2,$$

d. h. die Kreispunktpolarkurven sind äquidistant.

Also hat sich ergeben:*)

---

*) Vgl. Diss. S. 21 ff., wo ein wesentlich umständlicherer Beweis gegeben ist.

Die Kreispunktpolarkurven sind äquidistant auf den und nur auf den Flächen, auf welchen die Summe der Hauptkrümmungsradien konstant ist.

Diese Flächen sind von *U. Dini**) untersucht worden. Die Differentialgleichungen der Krümmungskurven und die der Kreispunktpolarkurven lassen sich auf ihnen durch Quadratur integrieren**).

IV.

Eine Kurvenschar $A\,du + B\,dv = 0$ wird von geodätischen Linien gebildet, wenn die Gleichung***) erfüllt ist:

$$(8.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\frac{FB-GA}{\sqrt{EB^2-2FAB+GA^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{FA-EB}{\sqrt{EB^2-2FAB+GA^2}}=0.$$

Wählt man die Krümmungskurven als Parameterlinien, so lauten nach (2.) die Gleichungen der Kreispunktpolarkurven

$$\pm i\,L\sqrt{G}\,du+N\sqrt{E}\,dv=0.$$

Diese Kurven sind daher geodätische Linien, wenn die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{iLG\sqrt{G}}{\sqrt{E^2N^2-G^2L^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{NE\sqrt{E}}{\sqrt{E^2N^2-G^2L^2}}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{-iLG\sqrt{G}}{\sqrt{E^2N^2-G^2L^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{NE\sqrt{E}}{\sqrt{E^2N^2-G^2L^2}}=0.$$

Durch Addition bezw. Subtraktion folgt hieraus

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{LG\sqrt{G}}{\sqrt{E^2N^2-G^2L^2}}=0,\quad \frac{\partial}{\partial v}\frac{NE\sqrt{E}}{\sqrt{E^2N^2-G^2L^2}}=0,$$

so daß sein muß

---

*) Ann. di mat. 7. (1865.) S. 5 ff.

**) Diss. S. 20 f.

***) Vgl. z. B. *Bianchi*, a. a. O. S. 150.

$$\frac{LG\sqrt{G}}{\sqrt{E^2N^2-G^2L^2}}=V, \quad \frac{NE\sqrt{E}}{\sqrt{E^2N^2-G^2L^2}}=U,$$

wo U und V Funktionen von u bezw. v allein bedeuten. Mit Benutzung der Hauptkrümmungsradien nehmen die Gleichungen die Form an

$$(9.) \qquad \frac{R_2\sqrt{G}}{\sqrt{R_1^2-R_2^2}}=V, \quad \frac{R_1\sqrt{E}}{\sqrt{R_1^2-R_2^2}}=U.$$

Differenziert man die Logarithmen dieser Gleichungen nach u bezw. v und benutzt die beiden ersten Fundamentalgleichungen in der Form*)

$$\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}=\frac{R_1}{R_2(R_1-R_2)}\frac{\partial R_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}=\frac{R_2}{R_1(R_2-R_1)}\frac{\partial R_1}{\partial v},$$

so ergibt sich

$$(10.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R_2}{\partial u}\dfrac{R_1(2R_1+R_2)}{R_2(R_1^2-R_2^2)}-\dfrac{\partial R_1}{\partial u}\dfrac{R_1}{R_1^2-R_2^2}=0, \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial v}\dfrac{R_2(2R_2+R_1)}{R_1(R_1^2-R_2^2)}-\dfrac{\partial R_2}{\partial v}\dfrac{R_2}{R_1^2-R_2^2}=0. \end{cases}$$

Auf der *Kugel* fallen die Kreispunktpolarkurven mit den Minimalkurven zusammen, sind daher als geodätische Linien aufzufassen. Auf *abwickelbaren Flächen* fallen die Kreispunktpolarkurven mit den geradlinigen Erzeugenden zusammen, sind daher ebenfalls geodätische Linien. Von diesen beiden Fällen, in denen entweder $R_1-R_2=0$ oder $R_1=\infty$ bezw. $R_2=\infty$ ist, soll im folgenden abgesehen werden; dann läßt sich (10.) einfacher so schreiben

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{R_2^2}{R_1+R_2}=0; \quad \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{R_1^2}{R_1+R_2}=0.$$

Bezeichnet man mit $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ Funktionen von u bezw. v allein, so ist also

---

*) Vgl. z. B. *Scheffers*, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, II. Bd. (Leipzig, 1902.) S. 501.

$$(11.) \qquad \frac{R_2^2}{R_1+R_2}=\psi(v) \text{ und } \frac{R_1^2}{R_1+R_2}=\varphi(u).$$

Auf *Minimalflächen* fallen die Kreispunktpolarkurven mit den Minimalkurven zusammen, sind daher als geodätische Linien aufzufassen. Sieht man von diesem Falle, in dem $R_1+R_2=0$ ist, ab, so folgt aus (11.) weiter

$$R_2=\pm\sqrt{\frac{\psi(v)}{\varphi(u)}}\,R_1$$

und $\quad R_1=\varphi(u)\pm\sqrt{\varphi(u)\,\psi(v)}, \quad R_2=\psi(v)\pm\sqrt{\varphi(u)\,\psi(v)}.$

Durch Einführung neuer Parameter kann man, ohne die Parameterkurven zu ändern, diese Gleichungen auf die Form bringen

$$R_1=u+\sqrt{uv}, \quad R_2=v+\sqrt{uv}.$$

Aus den beiden ersten Fundamentalgleichungen berechnet man E und G. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{E}=\frac{R_2}{R_1(R_2-R_1)}\frac{\partial R_1}{\partial v}=\frac{1}{2(v-u)}=\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{v-u},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{G}=\frac{R_1}{R_2(R_1-R_2)}\frac{\partial R_2}{\partial u}=\frac{1}{2(u-v)}=\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{u-v}.$$

Daraus folgt

$$\sqrt{E}=U\sqrt{v-u}; \quad \sqrt{G}=V\sqrt{u-v},$$

wo wieder U und V Funktionen von u bezw. v allein bedeuten.

Wenn man die gefundenen Werte in die dritte Fundamentalgleichung*)

$$-\frac{\sqrt{E}\sqrt{G}}{R_1R_2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)$$

*) Vgl. z. B. *Scheffers*, a. a. O. S. 501.

einsetzt, so ergibt sich

$$\frac{2(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2}{\sqrt{uv}}=\frac{1}{uv}\left(\frac{1}{V^2}-\frac{1}{U^2}\right)-\left(\frac{V'}{V^3}+\frac{U'}{U^3}\right).$$

Dabei ist abgesehen von $\sqrt{u}+\sqrt{v}=0$. Diese Ausnahme führt nur zu dem schon erledigten Fall $(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2=R_1+R_2=0$ zurück.

Setzt man

$$U_1=\frac{1}{U^2} \quad \text{und} \quad V_1=\frac{1}{V^2}$$

und zur Abkürzung

$$B=2\frac{(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2}{\sqrt{uv}},$$

so folgt weiter

$$B(u-v)=V_1-U_1+\frac{u-v}{2}(V_1'+U_1').$$

Man differenziere zweimal nach v:

$$(u-v)\frac{\partial B}{\partial v}-B=V_1'-\frac{1}{2}(V_1'+U_1')+\frac{u-v}{2}V_1'',$$

$$(u-v)\frac{\partial^2 B}{\partial v^2}-2\frac{\partial B}{\partial v}=\frac{1}{2}V_1''-\frac{1}{2}V_1''+\frac{u-v}{2}V_1''',$$

oder

$$V_1'''=2\frac{\partial^2 B}{\partial v^2}-\frac{4}{u-v}\frac{\partial B}{\partial v}. \tag{12.}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bleibt zu berechnen. Es ist

$$-\frac{4}{u-v}\frac{\partial B}{\partial v}=\frac{4}{v\sqrt{uv}},$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial v^2}=\frac{3u-v}{2v^2\sqrt{uv}}.$$

Demnach wird aus (12.)

$$V_1''' = 3\,\frac{u+v}{v^2\sqrt{uv}}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion von v allein, nicht aber die rechte, da u und v voneinander unabhängig sein müssen. Demnach führen die Gleichungen (11.) auf einen Widerspruch*). Es bleibt daher nur übrig, daß eine der Funktionen $\varphi(u)$ oder $\psi(v)$ eine Konstante ist. Da durch Vertauschung von u und v die eine der Gleichungen in die andere übergeht, so genügt es zu setzen

$$(13.) \qquad \frac{R_2^2}{R_1+R_2} = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad \frac{R_1^2}{R_1+R_2} = \varphi(u).$$

Also lautet das bisherige Ergebnis:

Außer auf der Kugel, auf Minimalflächen und auf abwickelbaren Flächen sind die Kreispunktpolarkurven geodätische Linien nur auf den Flächen, auf denen

$$\frac{R_2^2}{R_1+R_2} = \textit{konst.} \quad \textit{und} \quad \frac{R_1^2}{R_1+R_2} = \varphi(u)$$

ist, wo $\varphi(u)$ eine Funktion von u allein bedeutet.

Die der Bedingung (13.) genügenden Flächen sollen genauer untersucht werden.

Aus (13.) folgt unmittelbar, daß R_1 und R_2 Funktionen von u allein sind. Demnach liefert die erste Fundamentalgleichung

$$\sqrt{E} = f(u),$$

wo $f(u)$ eine Funktion von u allein ist. Die zweite Fundamentalgleichung wird

---

*) Zu diesem Nachweis, sowie zu den nun folgenden Entwicklungen vgl. *R. v. Lilienthal*, zur Theorie der äquidistanten Kurven auf einer Fläche. Mathem. Annalen Bd. 62. (1906.) S. 560ff.

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{G}=\frac{aR_2-1}{R_2(aR_2-2)}\frac{\partial R_2}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log\left[R_2(aR_2-2)\right].$$

Folglich ist

$$\sqrt{G}=g(v)\sqrt{R_2(aR_2-2)},$$

wo $g(v)$ eine Funktion von v allein ist.

Nunmehr werde ein neuer Parameter σ eingeführt durch die Gleichung

$$aR_2-1=\sigma.$$

Die Parameterkurven bleiben hierbei ungeändert. Da R_2 eine Funktion von u allein ist, so läßt sich auch umgekehrt u als Funktion von σ bestimmen. Durch den neuen Parameter ausgedrückt, lauten die bisherigen Ergebnisse

$$R_1=\frac{\sigma(\sigma+1)}{a},\quad R_2=\frac{\sigma+1}{a},\quad \sqrt{E}=f_1(\sigma),\quad \sqrt{G}=g(v)\sqrt{\frac{\sigma^2-1}{a}}.$$

Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen, daß auch umgekehrt diese Werte die Gleichungen (9.) und damit auch weiter die ursprüngliche Bedingungsgleichung (8.) erfüllen.

Um $f_1(\sigma)$ zu bestimmen, setzt man die dritte Fundamentalgleichung an:

$$-\frac{\sqrt{E}\sqrt{G}}{R_1R_2}=\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\sigma}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right).$$

Daraus wird

$$-\frac{a^2\sqrt{E}\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{a}\,\sigma(\sigma+1)^2}=\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{a}\sqrt{E}\sqrt{\sigma^2-1}}\right),$$

oder

$$d\frac{a}{\sigma+1}=\frac{1}{2}\,d\left(\frac{\sigma}{\sqrt{E}\sqrt{a(\sigma^2-1)}}\right)^2,$$

$$E=\frac{\sigma^2}{a(\sigma-1)\left[\alpha(\sigma+1)+2a\right]}.$$

Hierin ist α die Integrationskonstante.

Danach hat das Bogenelement der gesuchten Fläche die Form

$$ds^2 = \frac{\sigma^2}{a(\sigma-1)[\alpha(\sigma+1)+2a]} d\sigma^2 + \frac{\sigma^2-1}{a} g(v)^2 dv^2.$$

Führt man hierin, ohne die Parameterkurven zu ändern, die neue Variable $dv_1 = g(v)\, dv$ ein, so geht das Bogenelement über in

$$(14.) \qquad ds^2 = \frac{\sigma^2}{a(\sigma-1)[\alpha(\sigma+1)+2a]} d\sigma^2 + \frac{\sigma^2-1}{a} dv_1^2.$$

Da E, G, R_1, R_2 und folglich auch L und N nur von σ abhängen, M und F aber Null sind, so sind die gesuchten Flächen *Rotationsflächen*. Deren Gleichungen sind zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke sei eine Rotationsfläche gegeben durch die Gleichungen

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = p(u).$$

Das Bogenelement dieser Fläche ist

$$(15.) \qquad ds^2 = (1+p'^2)\, du^2 + u^2\, dv^2.$$

Vergleicht man (14.) mit (15.), so folgt zunächst die Beziehung

$$u^2\, dv^2 = \frac{\sigma^2-1}{a} dv_1^2.$$

Da σ nur von u, und v_1 nur von v abhängt, so erhält man einzeln

$$dv^2 = b\, dv_1^2 \quad \text{und} \quad b\, u^2 = \frac{\sigma^2-1}{a},$$

wo b im reellen Falle eine positive Konstante ist. Daraus folgt

$$(16.) \qquad \sigma = \sqrt{1+abu^2} \quad \text{und} \quad u = \frac{\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{ab}}.$$

Vergleicht man weiter (14.) und (15.), so findet man auch

$$(1+p'^2)\,du^2=\frac{\sigma^2}{a(\sigma-1)[\alpha(\sigma+1)+2a]}d\sigma^2.$$

Da aber nach (16.)

$$du=\frac{\sigma}{\sqrt{ab}\sqrt{\sigma^2-1}}d\sigma$$

ist, so ergibt sich

$$1+p'^2=\frac{b(\sigma+1)}{\alpha(\sigma+1)+2a} \quad \text{und} \quad p'^2=\frac{(b-\alpha)(\sigma+1)-2a}{\alpha(\sigma+1)+2a}.$$

Zwischen den drei Konstanten a, b, α besteht eine einfache Beziehung. Setzt man nämlich die gefundenen Werte z. B. in die Gleichung ein

$$R_2=\frac{u\sqrt{1+p'^2}}{p'},$$

so erhält man

$$\frac{\sigma+1}{a}=\frac{\sqrt{\sigma^2-1}\,\sqrt{b(\sigma+1)}}{\sqrt{ab}\,\sqrt{(b-\alpha)(\alpha+1)-2a}}$$

oder

$$(\sigma+1)(b-a-\alpha)=0$$

d. h.

$$\alpha=b-a.$$

Somit ist

$$p'^2=\frac{a(\sigma-1)}{(b-a)\sigma+b+a}$$

und

$$z=\int\sqrt{\frac{a(\sigma-1)}{(b-a)\sigma+b+a}}du$$

oder

$$z=\int\frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{b}\sqrt{(b-a)\sigma^2+2b\sigma+b+a}}.$$

Bei der Lösung dieses Integrals sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I. } b=a; \qquad \text{II. } b>a; \qquad \text{III. } b<a,$$

wo b auf reellen Flächen stets positiv zu nehmen ist.

I. Fall: $b=a$.

Aus

$$\frac{dp}{du}=\frac{\sqrt{\sigma-1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{1+a^2u^2}-1}}{\sqrt{2}}$$

folgt, daß die Fläche für $\sigma=1$ oder $u=0$ einen kleinsten Radius des Parallelkreises besitzt. Legt man die (x, y)-Ebene durch den Punkt der z-Achse, in dem $\sigma=-1$ und $u=0$ ist, so erhält man aus

$$z=\int_{-1}^{\sigma}\frac{\sigma d\sigma}{a\sqrt{2}\sqrt{\sigma+1}}$$

den Wert

$$z=\frac{\sqrt{2}}{3a}\sqrt{\sigma+1}\,(\sigma-2).$$

Setzt man hierin für σ seinen Wert aus (16.) ein, so lautet schließlich die Gleichung der gesuchten Fläche

$$(17.)\qquad z=\frac{\sqrt{2}}{3a}\sqrt{1+\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}}\left(\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}-2\right).$$

Für die in der (x, z)-Ebene liegende Meridiankurve ergibt sich: da immer $a^2x^2\geqq 0$ ist, so ist entweder

$$\sqrt{1+a^2x^2}\leqq -1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1+a^2x^2}\geqq +1.$$

Mit Rücksicht auf $\sqrt{1+\sqrt{1+a^2x^2}}$ kann im reellen Falle daher $\sqrt{1+a^2x^2}$ nur für $x=0$ das negative Vorzeichen erhalten. Da in diesem Falle auch $z=0$ wird, so ist der Koordinatenanfangspunkt ein isolierter Punkt der Fläche.

In Figur 1 ist der auf der positiven Seite der x-Achse verlaufende Teil der Meridiankurve gezeichnet.

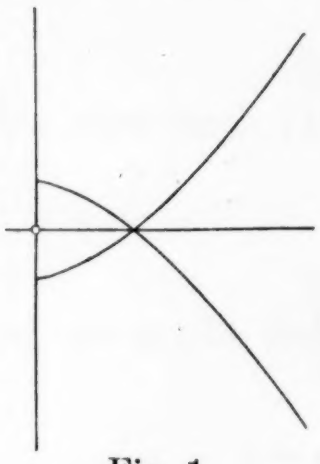

Fig. 1.

Die Gleichung der Kreispunktpolarkurven lautet jetzt

$$\frac{R_2\sqrt{E}}{R_1\sqrt{G}}d\sigma \pm i\,dv_1 = 0.$$

Mit Benutzung der oben gefundenen Werte nimmt sie die Form an

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{2}(1-\sigma)\sqrt{1+\sigma}} \pm i\,dv = 0.$$

Integriert ergibt dies

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{2+\sqrt{2(\sigma+1)}}{\sigma-1}+\frac{1}{2}\right] \pm iv = \text{konst.},$$

oder, wenn man für σ wieder seinen Wert einsetzt:

$$(18.)\qquad \frac{1}{2}\log\left[\frac{2+\sqrt{2(\sqrt{1+a^2u^2}+1)}}{\sqrt{1+a^2u^2}-1}+\frac{1}{2}\right] \pm iv = \text{konst.}$$

II. Fall: $b > a$.

Aus

$$\frac{dp}{du} = \sqrt{\frac{a(\sigma-1)}{(b-a)\sigma+b+a}}$$

folgt wieder, daß die Fläche für $\sigma = 1$ oder $u = 0$ einen kleinsten Parallelkreis besitzt. Ein größter für

$$\sigma = -\frac{b+a}{b-a} \quad \text{oder} \quad u = \frac{2}{b-a}$$

ist bei reellen Flächen, wie unten gezeigt wird, nicht vorhanden.

Legt man die (x,y)-Ebene wieder durch den Punkt der z-Achse, für den $\sigma = -1$ und $u = 0$ ist, so wird

$$z = \int_{-1}^{\sigma} \frac{\sigma\,d\sigma}{\sqrt{b(b-a)}\sqrt{\sigma^2+\frac{2b}{b-a}\sigma+\frac{b+a}{b-a}}}.$$

Das gibt integriert

$$z=\frac{1}{\sqrt{b(b-a)}}\Big[-\frac{b}{b-a}\log\frac{1}{a}\Big\{(b-a)\sigma+b$$

$$+(b-a)\sqrt{(\sigma+1)\Big(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\Big)}\Big\}+\sqrt{(\sigma+1)\Big(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\Big)}\Big]. \tag{19.}$$

Wird für σ sein Wert gesetzt, so folgt schließlich

$$z=\frac{1}{\sqrt{b(b-a)}}\Big[-\frac{b}{b-a}\log\frac{1}{a}\Big\{(b-a)\sqrt{1+ab(x^2+y^2)}+b$$

$$+(b-a)\sqrt{\Big(1+\sqrt{1+ab(x^2+y^2)}\Big)\Big(\frac{b+a}{b-a}+\sqrt{1+ab(x^2+y^2)}\Big)}\Big\} \tag{20.}$$

$$+\sqrt{\Big(1+\sqrt{1+ab(x^2+y^2)}\Big)\Big(\frac{a+b}{a-b}+\sqrt{1+ab(x^2+y^2)}\Big)}\Big].$$

In dieser Formel ist b stets positiv, dagegen könnte a positiv und negativ sein; außerdem können den Wurzeln positive und negative Werte beigelegt werden. Daraus ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

A. $b-a>0,\ b>0,\ a>0.$

$$\alpha)\qquad \sigma<0,\ \sqrt{(\sigma+1)\Big(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\Big)}<0.$$

Da $abu^2>0$ und folglich $\sigma+1<0$ ist, so muß auch $|\sigma|>\frac{b+a}{b-a}$ sein. Aus (19.) folgt weiter, daß sicher $b>(b-a)|\sigma|$, also zusammen mit dem vorhergehenden Ergebnis, daß $b>b+a$ sein müßte. Das aber ist unmöglich, so daß A, α) keine reellen Flächen liefert.

$$\beta)\qquad \sigma<0,\ \sqrt{(\sigma+1)\Big(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\Big)}>0.$$

Mit Benutzung des soeben Bewiesenen folgt aus (19.), daß

$$(b-a)\sqrt{(1-|\sigma|)\Big(\frac{b+a}{b-a}-|\sigma|\Big)}>|\sigma|(b-a)-b$$

sein muß. Die linke Seite ist positiv; nach A, α) muß es die rechte auch sein. Dann aber folgt durch Quadrieren $-a^2>0$. Demnach gelangt man auch hier zu einem Widerspruch, so daß auch A, β) zu keinen reellen Flächen führt.

$$\gamma) \qquad \sigma>0,\ \sqrt{(\sigma+1)\left(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\right)}>0,$$

$$\delta) \qquad \sigma>0,\ \sqrt{(\sigma+1)\left(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\right)}<0.$$

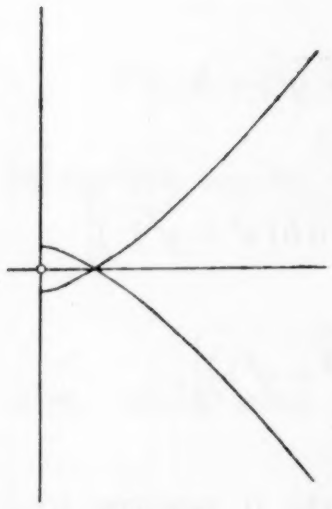

Fig. 2.

In beiden Fällen erhält man reelle Flächen. Einen größten Parallelkreis gibt es nicht; denn setzt man $\sigma=-\frac{b+a}{b-a}$ in (19.) ein, so tritt darin log (—1) auf.

$\sigma=-1$ oder $u=0$ liefert wieder einen isolierten Punkt der Fläche.

In Figur 2 sind die zu A, γ) gehörigen Meridiankurven, welche in der (x,z)-Ebene auf der positiven Seite der x-Achse liegen, für ein Zahlenbeispiel gezeichnet. Die Kurven A, δ) haben einen genau gleichartigen Verlauf.

B. $b-a>0,\ b>0,\ a<0.$

$$\alpha) \qquad \sigma>0,\ \sqrt{(\sigma+1)\left(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\right)}>0.$$

Da a negativ ist, so muß in (19.) der Wert in der geschweiften Klammer auch negativ sein. B, α) liefert daher sicher keine reellen Flächen.

$$\beta) \qquad \sigma>0,\ \sqrt{(\sigma+1)\left(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\right)}<0.$$

Es müßte sein

$$(b-a)\,\sigma+b<(b-a)\sqrt{(\sigma+1)\left(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\right)}.$$

Daraus aber folgt wie oben $0<-a^2$. Auch hier gibt es also keine reellen Flächen.

$$\gamma) \qquad \sigma<0,\ \sqrt{(\sigma+1)\left(\sigma+\frac{b+a}{b-a}\right)}>0.$$

Es sei $-a\equiv a'$, dann ist sicher $\sqrt{1-a'bu^2}<1$ und folglich $\sigma+1>0$. Damit die Wurzeln reell bleiben, muß einerseits $u^2<\frac{1}{a'b}$ sein und andrerseits auch $\frac{b-a'}{b+a'}>|\sigma|$ und

$$\frac{(b-a')^2}{(b+a')^2}>1-a'bu^2 \quad \text{oder} \quad a'bu^2>\frac{4a'b}{(b+a')^2}.$$

Also muß sein

$$\frac{1}{a'b}>u^2>\frac{4}{(b+a')^2}.$$

Aus (19.) folgt, daß bestimmt sein müßte $(b+a')\sqrt{1-a'bu^2}>b$ und folglich $1-a'bu^2>\frac{b^2}{(b+a')^2}$. Setzt man für u^2 den kleinsten möglichen Wert ein: $u^2=\frac{4}{(b+a')^2}$, so muß auch für ihn die Ungleichheit erfüllt sein. Dann aber folgt $1-\frac{4a'b}{(b+a')^2}>\frac{b^2}{(b-a')^2}$ d. h. $(b-a')^2>b^2$. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß auch hier keine reellen Flächen möglich sind.

$$\delta) \qquad \sigma<0,\ \sqrt{(1+\sigma)\left(\frac{b+a}{b-a}+\sigma\right)}<0.$$

Da jedenfalls, wie oben gezeigt, $b-(b+a')|\sigma|$ positiv ist, so müßte sein

$$b-(b+a')|\sigma|<(b+a')\sqrt{(1-|\sigma|)\left(\frac{b-a'}{b+a'}-|\sigma|\right)}.$$

Hieraus aber folgt, wie unter A, β) daß $-a'^2>0$ sein müßte.

Es hat sich also gezeigt, daß die Annahme $a<0$ überhaupt keine reellen Flächen liefert.

Die Gleichung der Kreispunktpolarkurven lautet jetzt

$$\frac{\sqrt{b}\,d\sigma}{(\sigma-1)\sqrt{(b-a)\sigma^2+2b\sigma+b+a}}\pm i\,dv=0.$$

Sie ergibt integriert

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{2+\sqrt{\frac{b-a}{b}\sigma^2+2\sigma+\frac{b+a}{b}}}{\sigma-1}+\frac{2b-a}{2b}\right]\pm iv=\text{konst.}$$

Wenn man für σ seinen Wert einsetzt, erhält sie die Form

$$(21.)\quad \frac{1}{2}\log\left[\frac{2+\sqrt{a(b-a)u^2+2+2\sqrt{1+abu^2}}}{\sqrt{1+abu^2}-1}+\frac{2b-a}{2b}\right]\pm iv=\text{konst.}$$

Gleichung (18.) ist in dieser Formel als Spezialfall enthalten; sie ergibt sich unmittelbar, wenn man $a=b$ setzt.

III. Fall: $b<a$.

Aus $\frac{dp}{du}=\sqrt{\frac{a(\sigma-1)}{(b-a)\sigma+b+a}}$ folgt, daß die Fläche für $\sigma=1$ oder $u=0$ einen kleinsten und für $\sigma=\frac{a+b}{a-b}$ oder $u=\frac{2}{a-b}$ einen größten Parallelkreis besitzt.

Legt man die (x, y)-Ebene durch den Punkt der z-Achse, in dem $\sigma=\frac{a+b}{a-b}$ ist, so wird

$$z=\frac{1}{\sqrt{b(a-b)}}\int_{\frac{a+b}{a-b}}^{\sigma}\frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}+\frac{2b}{a-b}\sigma-\sigma^2}}$$

oder integriert

$$(22.)\quad z=\frac{1}{\sqrt{b(a-b)}}\left[\frac{b}{a-b}\left(\arcsin\frac{(a-b)\sigma-b}{a}-\arcsin 1\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{(\sigma+1)(a+b-(a-b)\sigma)}{a-b}}\right].$$

Indem man noch für σ seinen Wert einsetzt, ergibt sich

$$(23.)\quad z=\frac{1}{\sqrt{b(a-b)}}\left[\frac{b}{a-b}\left(\arcsin\frac{(a-b)\sqrt{1+ab(x^2+y^2)}-b}{a}-\frac{\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{(1+\sqrt{1+ab(x^2+y^2)})(a+b-(a-b)\sqrt{1+ab(x^2+y^2)})}{a-b}}\right].$$

Da a und b positiv sind, so ist $|\sigma|>1$. Es darf σ nicht negativ genommen werden, da sonst $1+\sigma<0$, dagegen $a+b-(a-b)\sigma>0$ wäre, so daß die Wurzel in (22.) imaginär würde. Nur $\sigma=-1$ liefert periodisch wiederkehrende, isolierte Punkte der Fläche. Damit obige Wurzel stets reell bleibt, ist notwendig, daß

$$\sigma \leqq \frac{a+b}{a-b} \quad \text{und} \quad u^2 \leqq \frac{4}{(a-b)^2} \quad \text{ist.}$$

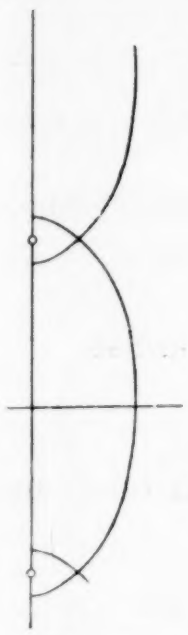

Fig. 3

In Fig. 3 ist für ein Zahlenbeispiel der Verlauf der Meridiankurve der (x, z)-Ebene auf der positiven Seite der x-Achse gezeichnet. Die Kurve wiederholt sich periodisch.

Die Gleichung der Kreispunktpolarkurven ist dieselbe wie oben. (Vgl. Formel (21.).)

Algebraische Theorie der Körper.

Von Herrn *Ernst Steinitz* in Berlin.

In dem vorliegenden Aufsatz ist der Begriff „Körper“ in derselben abstrakten und allgemeinen Weise gefaßt wie in *H. Webers* Untersuchungen *über die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie**), nämlich als ein System von Elementen mit zwei Operationen: Addition und Multiplikation, welche dem assoziativen und kommutativen Gesetz unterworfen, durch das distributive Gesetz verbunden sind und unbeschränkte und eindeutige Umkehrungen zulassen**). Während aber bei *Weber* das Ziel eine allgemeine, von der Zahlenbedeutung der Elemente unabhängige Behandlung der *Galois*schen Theorie ist, steht für uns der Körperbegriff selbst im Mittelpunkt des Interesses. *Eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen*, kann als Programm dieser Arbeit gelten***). Da hierbei die der Arithmetik im engeren Sinn angehörigen Unterscheidungen zwischen ganzen und gebrochenen Größen nicht weiter zu verfolgen waren, wurde der Titel *Algebraische Theorie der Körper* gewählt.

Durch die hier gekennzeichnete Tendenz ist auch der Weg, den wir einzuschlagen haben, vorgezeichnet. Wir werden von der Bildung der einfachsten Körper ausgehen und sodann die Methoden betrachten, durch

*) Math. Ann. 43. S. 521. — **) Nur die Division durch Null ist auszuschließen.

***) Zu diesen allgemeinen Untersuchungen wurde ich besonders durch *Hensels* Theorie der algebraischen Zahlen (Leipzig, 1908) angeregt, in welcher der Körper der p-adischen Zahlen den Ausgangspunkt bildet, ein Körper, der weder den Funktionen- noch den Zahlkörpern im gewöhnlichen Sinne des Wortes beizuzählen ist.

welche man von einem vorliegenden Körper durch Erweiterung zu einem umfassenderen gelangt. Die erste Aufgabe führt auf den Begriff des *Primkörpers* und eine Unterscheidung der Körper nach der *Charakteristik*. In jedem Körper ist ein kleinster Körper oder Primkörper enthalten; derselbe ist entweder vom Typus des Körpers der rationalen Zahlen (Charakteristik 0) oder vom Typus des Restklassensystems einer Primzahl p (Charakteristik p). Bei vielen Fragen ist die Charakteristik ohne Bedeutung, bei andern aber zeigt sich eine tiefgehende Verschiedenheit zwischen den Körpern von der Charakteristik 0 und denen von Primzahlcharakteristik. Zu einer analogen Unterscheidung gibt die Betrachtung der sog. *einfachen* Erweiterungen Anlaß, welche durch Adjunktion eines einzigen Elementes erhalten werden können. Je nachdem ein solches Element einer algebraischen Gleichung des Grundkörpers genügt oder nicht, wird es als *algebraisch* oder *transzendent* (in bezug auf den Grundkörper) bezeichnet. Unter einer *algebraischen Erweiterung* verstehen wir ganz allgemein eine jede, deren sämtliche Elemente algebraisch sind, während jede andere Erweiterung *transzendent* heißt. Zu den algebraischen Erweiterungen gehören die *endlichen*, welche dadurch charakterisiert sind, daß durch eine endliche Anzahl von Elementen des Erweiterungskörpers alle Elemente linear und homogen mit Koeffizienten aus dem Grundkörper dargestellt werden können. In der Literatur werden zumeist nur diese Erweiterungen als algebraisch bezeichnet. Die hierher gehörigen Untersuchungen bilden den Inhalt der *Galois*schen Theorie.

Nach dem Vorgange von *Cauchy*, welcher zeigte, daß die Einführung der komplexen Zahlen durch Betrachtungen von Kongruenzen nach dem Modul x^2+1 zu umgehen ist*), hat *Kronecker* nachgewiesen, daß auch jegliche Einführung von Irrationalitäten bei Behandlung algebraischer Probleme**) vermieden werden kann, wenn man die Gleichungen durch Kongruenzen nach Modulsystemen ersetzt. Wir benutzen den *Kronecker*schen Gedanken, um zunächst einmal nachzuweisen, daß zu einem Körper $\mathfrak{R}$ und einer in $\mathfrak{R}$ irreduziblen Funktion $\varphi(x)$ ein Erweiterungskörper gefunden werden kann, der aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion einer Nullstelle von

*) Exerc. d'anal. et de phys. math. 4 (1847) S. 87.

**) Es handelt sich bei *Kronecker* stets nur um Probleme, die *endliche* Erweiterungen erfordern.

$\varphi(x)$ hervorgeht. Dabei gehen wir aber unter Einführung eines Symbols, durch welches wir alle Elemente des Erweiterungskörpers darstellen, und welches selbst Nullstelle von $\varphi(x)$ wird, von der Schreibweise der *Kongruenzen* wieder auf *Gleichungen* über. Auf diesem ersten Ergebnis bauen sich die weiteren Untersuchungen synthetisch auf. Die hier befolgte Methode darf als ebenso *rein arithmetisch* gelten wie die Methode der Kongruenzen, zu welcher der Übergang natürlich immer möglich und, wenn auch bisweilen unbequem, doch gar nicht zu verfehlen ist.

Aus dem Gebiet der endlichen Erweiterungen ist besonders die Tatsache hervorzuheben, daß die *Galois*sche Theorie, wie wir sie bei den algebraischen Zahlkörpern vorfinden, nicht bei allen Körpern in vollem Umfange besteht. Ein großer Teil jener Theorie beruht nämlich auf dem Satz, daß jede Gleichung mit verschwindender Diskriminante (mehrfachen Nullstellen) reduzibel sein muß. Aber eben dieser Satz gilt nicht allgemein. Dies gibt uns Anlaß die Körper in *vollkommene* und *unvollkommene* einzuteilen. Zu den ersteren gehören alle Körper von der Charakteristik 0, von den Körpern der Charakteristik p aber nur diejenigen, innerhalb deren die Ausziehung der p-ten Wurzel ausnahmslos möglich ist. Auf die Eigenschaften der unvollkommenen Körper mit ihren von der gewöhnlichen *Galois*schen Theorie teilweise abweichenden Gesetzen bin ich etwas weiter eingegangen, als für die fortlaufende Untersuchung unbedingt nötig gewesen wäre. Eine besondere Behandlung erforderten noch die Körper mit nur endlich vielen Elementen. Obgleich in ihnen wie in allen andern vollkommenen Körpern die Sätze der *Galois*schen Theorie uneingeschränkt gelten*), muß die Beweisführung doch zum Teil anders gestaltet werden.

Unter dem Titel „*ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik*“ hat *Kronecker* in diesem Journal einen Aufsatz veröffentlicht**), der sich mit der Bestimmung eines Primmodulsystems beschäftigt, für welches eine gegebene ganze Funktion einer Variabeln sich als Produkt von Linearfaktoren darstellen läßt. Daß die Existenz eines solchen Primmodulsystems für die allgemeine Arithmetik von fundamentaler Bedeutung ist, ist fraglos; der

*) Dies gilt auch z. B. bezüglich der von *Weber* für Körper mit unendlich vielen Elementen erledigten, für endliche Körper aber offen gelassenen Fragen; s. d. Schluß der zitierten Arbeit.

**) Bd. 100, S. 490. = Werke III, I, S. 209.

Hinweis auf den Fundamentalsatz der Algebra, durch welchen *Kronecker* die Bezeichnung seines Satzes als Fundamentalsatz rechtfertigt, erscheint aber nicht ganz zutreffend. Der Fundamentalsatz der Algebra gibt mehr; ihm würde im Gebiete der allgemeinen Arithmetik der Nachweis eines Primmodulsystems entsprechen, für welches *jede* Funktion des betrachteten Rationalitätsbereichs in Linearfaktoren zerfällt. Die Behandlung dieses Problems lag insofern außerhalb des Kreises der *Kronecker*schen Untersuchungen, als seine Erledigung die Einführung von *unendlich vielen* Unbestimmten erfordert. Übersetzen wir das Problem in unsere Ausdrucksweise, so handelt es sich darum, einen gegebenen Körper zu einem *algebraisch abgeschlossenen*, d. h. zu einem solchen Körper zu erweitern, in welchem jede ganze Funktion einer Unbestimmten in Linearfaktoren zerfällt. Diese Aufgabe gehört dem Gebiet der *unendlichen* algebraischen Erweiterungen an, sie wird in § 16 zunächst für den Fall eines Primkörpers von Primzahlcharakteristik gelöst. Die hierbei verwendete Methode ist auch in andern Fällen, so z. B. bei den von *Kronecker* allein betrachteten natürlichen Rationalitätsbereichen anwendbar; sie erfordert keine Herbeiziehung von Prinzipien, die nicht von allen Mathematikern anerkannt würden. Anders steht es mit dem Nachweis, daß unsere Aufgabe, sofern man noch fordert, daß der Erweiterungskörper keine überflüssigen Elemente enthält, im wesentlichen*) nur *eine* Lösung besitzt. Dieser Beweis kann z. B. schon für den Körper der rationalen Zahlen nicht ohne Benutzung des *Auswahlprinzips* geführt werden. Dieses Prinzip erscheint auch unvermeidlich, wenn man den Beweis der Existenz einer algebraisch abgeschlossenen Erweiterung für *jeden beliebigen* Körper führen will. Der auf dem Auswahlprinzip beruhende *Wohlordnungssatz* von *Zermelo* bildet ein wesentliches Hilfsmittel für diesen Beweis**). — Noch stehen viele Mathematiker dem Auswahlprinzip ablehnend gegenüber. Mit der zunehmenden Erkenntnis, *daß es Fragen in der Mathematik gibt, die ohne dieses Prinzip nicht entschieden werden können*, dürfte der Widerstand gegen dasselbe mehr und mehr schwinden. Dagegen erscheint es im Interesse der Reinheit der Methode zweckmäßig, das

*) Die präzise Erklärung für diesen Ausdruck s. § 5.

**) Die erste Anwendung des Wohlordnungssatzes auf ein arithmetisches Problem findet sich meines Wissens bei *Hamel*, Mathem. Ann. 60, S. 459.

genannte Prinzip so weit zu vermeiden, als die Natur der Frage seine Anwendung nicht erfordert. Ich habe mich bemüht, diese Grenze scharf hervortreten zu lassen.

Dies gilt auch von den Ausführungen des letzten Abschnitts, der von den *transzendenten* Erweiterungen handelt. Unter ihnen erscheinen als die einfachsten die *rein transzendenten*. Eine rein transzendente Erweiterung kommt im wesentlichen auf die Adjunktion von Unbestimmten hinaus, die eine endliche oder auch unendliche Menge von beliebiger Mächtigkeit bilden können. Der Wohlordnungssatz führt sofort zu der Erkenntnis, daß jede Erweiterung in eine rein transzendente und eine algebraische zerlegt werden kann.

Von hier aus läßt sich leicht die Stellung kennzeichnen, welche die von *Kronecker* betrachteten Körper innerhalb der Gesamtheit der Körper einnehmen. Bei *Kronecker* entwickelt sich der Körperbegriff in drei Stufen*). Den Ausgangspunkt bildet der „*absolute Rationalitätsbereich*“ d. i. der Körper der rationalen Zahlen, also ein besonderer Primkörper. Von ihm gelangt man durch Adjunktion einer endlichen Anzahl von Unbestimmten, also durch eine spezielle rein transzendente Erweiterung zum „*natürlichen Rationalitätsbereich*“, von diesem schließlich durch Adjunktion einer algebraischen Größe, d. h. durch eine spezielle algebraische Erweiterung zum „*Gattungsbereich*“. — Geht man statt dessen von einem *beliebigen* Primkörper aus, nimmt man eine *beliebige* rein transzendente, darauf eine *beliebige* algebraische Erweiterung vor, so hat man damit ein Verfahren, durch welches man zu *jedem* Körper gelangen kann.

Der vorliegende Aufsatz behandelt nur die *Grundzüge* einer allgemeinen Körpertheorie. Weitergehende Untersuchungen sowie Anwendungen auf Geometrie, Zahlen- und Funktionentheorie beabsichtige ich in einigen weiteren Abhandlungen folgen zu lassen.

Inhaltsübersicht: I. Grundlagen (§§ 1—6.); II. Algebraische Erweiterungen (§§ 7—15.); III. Unendliche algebraische Erweiterungen (§§ 16—21.); IV. Transzendente Erweiterungen (§§ 22—24.). — (Ausführliches Inhaltsverzeichnis am Schluß der Arbeit.)

---

*) Festschrift zu *Kummer*s Doktorjubiläum § 1—3. Dieses Journal. Bd. 92, S. 1. = Werke II, S. 237.

§ 1.

Systeme mit doppelter Komposition. Isomorphismus. Körper.

Bezeichnet $\mathfrak{S}$ ein System von Elementen, so verstehen wir unter einem *Kompositionsgesetz des Systems* $\mathfrak{S}$ irgendeine Festsetzung, durch welche jedem Paar a, b von Elementen dieses Systems, die auch gleich sein können, ein Element c desselben Systems zugeordnet wird. — Unter einem *System mit doppelter Komposition* verstehen wir ein solches, für welches *zwei* Kompositionsgesetze gegeben sind, die wir *Addition* und *Multiplikation* nennen. Durch die Addition wird je zwei Elementen a, b ihre *Summe* $a+b$, durch die Multiplikation ihr *Produkt* $a \cdot b$ zugeordnet.

Isomorphismus. Zwei Systeme $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ mit doppelter Komposition heißen *isomorph* oder *von gleichem (Kompositions-)Typus*, wenn es möglich ist, ihre Elemente ein-eindeutig so aufeinander zu beziehen, daß der Summe und dem Produkt irgend zweier Elemente des einen Systems in dem andern allemal die Summe und das Produkt der entsprechenden Elemente zugeordnet ist; die Beziehung selbst heißt eine isomorphe oder Isomorphismus.

Körper. — Bisher haben wir die beiden Kompositionsgesetze keiner weiteren Bedingung als der der Eindeutigkeit unterworfen. Führen wir weitere Bedingungen ein, so gelangen wir zu besonderen Arten von Systemen mit doppelter Komposition. Unter diesen sind von besonderer Wichtigkeit die *Rationalitätsbereiche (Kronecker)* oder *Körper (Dedekind)*, Systeme, welche die nachstehenden 7 Bedingungen erfüllen:

1. *Das assoziative Gesetz der Addition:*

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

2. *das kommutative Gesetz der Addition:*

$$a+b=b+a,$$

3. *das assoziative Gesetz der Multiplikation:*

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),$$

4. *das kommutative Gesetz der Multiplikation:*

$$a\cdot b=b\cdot a,$$

5. *das distributive Gesetz:*

$$a(b+c)=ab+ac,$$

6. *das Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion:*

Sind a, b Elemente des Systems, so gibt es in demselben ein und nur ein Element x, für welches $a+x=b$ wird. — Dieses Element sei mit $b-a$ bezeichnet und die *Differenz* von a und b genannt, so daß allgemein $a+(b-a)=b$ wird.

Bevor wir die siebente und letzte Bedingung aufstellen, ziehen wir aus den vorangehenden einige einfache Folgerungen. Es seien a, b irgend zwei Elemente unseres Systems. Setzen wir $a-a=x$, $b-b=y$, so bestehen zufolge 6. die Gleichungen: $a+x=a$, $b=b+y$, und wenn wir diese addieren, so ergibt sich nach Anwendung von 1. und 2.: $(a+b)+x=(a+b)+y$ und hieraus nach 6. $x=y$ oder $a-a=b-b$. Es gibt also ein ausgezeichnetes Element — wir nennen es *Null* (0) —, welches durch jede Differenz von der Form $a-a$ dargestellt wird. — Bezeichnen wieder a, b beliebige Elemente des Systems, so ist $a\cdot b=a(b+0)=a\cdot b+a\cdot 0$, daher $a\cdot 0=a\cdot b-a\cdot b=0$, d. h.: *ein Produkt, in welchem ein Faktor* 0 *ist, ist selbst* 0. — Nunmehr lassen wir die letzte Bedingung folgen:

7. *das Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Division:*

Das System enthält außer 0 *noch wenigstens ein Element, und wenn a ein von* 0 *verschiedenes, b ein beliebiges Element des Systems ist, so gibt es in demselben ein und nur ein Element x, für welches $a\cdot x=b$ wird.* — Wir nennen x den *Quotienten* von b und a, in Zeichen $x=\frac{b}{a}$ oder $=b:a$.

Sind alle 7 Bedingungen erfüllt, so heißt das System ein *Körper*. Beispiele für Körper sind die Systeme der rationalen, der reellen der komplexen Zahlen u. s. f. Die Bedeutung der angegebenen Bedingungen beruht darauf, daß alle in den genannten Körpern herrschenden Gesetze, soweit sie durch Gleichungen zwischen Aggregaten, die sich aus ihren Elementen rational zusammensetzen, ausdrückbar sind, als Folgerungen aus jenen Bedingungen erscheinen und sich daher in allen Körpern wiederfinden. Ohne dies in allen Einzelheiten auszuführen, wollen wir doch hier einige der wesentlichen Momente hervorheben: Sind a, b zwei von 0 verschiedene Elemente eines Körpers $\mathfrak{K}$, so ist nach 7. $a\cdot b$ von $a\cdot 0=0$ verschieden, d. h. *ein Produkt ist nur dann gleich* 0, *wenn wenigstens ein Fak-*

tor verschwindet. — Sind a und b von 0 verschieden, und bestimmt man x und y durch die Bedingungen $a \cdot x = a$, $b \cdot y = b$, so folgt $(ab)x = b(ax) = ba = (by)a = (ab)y$, $(ab)x = (ab)y$, mithin nach 7. $x = y$. Bezeichnen wir also die Lösung der Gleichung $ax = a$ mit ε, so hat ε als einziges Element von $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft, mit jedem Element von $\mathfrak{R}$ multipliziert, dieses unverändert zu lassen, und wird durch jeden Quotienten von der Form $\frac{a}{a}$ $(a \neq 0)$ dargestellt. Dieses ausgezeichnete Element nennen wir die *Einheit*; wir werden sie stets durch ε bezeichnen.

Zu den Sätzen, deren Beweis lediglich auf Grund der angegebenen 7 Bedingungen geführt werden kann, gehören auch die grundlegenden Sätze aus der Determinantentheorie. Insbesondere gilt für jeden Körper $\mathfrak{R}$:

1) n lineare Gleichungen mit n Unbekannten

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = c_i, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

worin die Koeffizienten a_{ik}, c_i gegebene Elemente aus $\mathfrak{R}$ sind, haben, wenn die Determinante $|a_{ik}|$ nicht 0 ist, ein und nur ein Lösungssystem in $\mathfrak{R}$.

2) n homogene lineare Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

besitzen wenigstens ein Lösungssystem, dessen Elemente nicht sämtlich 0 sind.

Es sei endlich gleich an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß es auch Körper gibt, die nur eine *endliche* Anzahl von Elementen besitzen. So bilden die p Restklassen, welche zu einer Primzahl p als Modul gehören, ein System mit doppelter Komposition, welches alle 7 Bedingungen erfüllt, also ein Körper in unserem Sinne ist.

§2.

Teilkörper, Erweiterung, Adjunktion.

Ein Teilsystem $\mathfrak{R}'$ eines Körpers $\mathfrak{R}$ kann vermöge der in $\mathfrak{R}$ herrschenden Kompositionsgesetze wiederum einen Körper darstellen. Offenbar ist hierzu notwendig und hinreichend, daß, wenn α und β Elemente von $\mathfrak{R}'$ sind, auch $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$ und, falls $\beta \neq 0$, $\frac{\alpha}{\beta}$ zu $\mathfrak{R}'$ gehören. Wir sagen dann: *der Körper $\mathfrak{R}$ umfaßt den Körper $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}'$ ist in $\mathfrak{R}$ ent-*

halten, und nennen $\mathfrak{k}'$ *Teilkörper* von $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}$ *Erweiterungskörper* oder *Erweiterung* von $\mathfrak{k}'$. In der Regel werden wir zu den Teil- und Erweiterungskörpern eines Körpers diesen selbst hinzurechnen; wo dies nicht der Fall, wird es aus der Ausdrucksweise („wirkliche Erweiterung", „echter Teilkörper", „nur ein Teilkörper") oder aus dem Zusammenhange zu ersehen sein. — Man überzeugt sich nun sofort von der Giltigkeit des folgenden Satzes:

1. *Bezeichnet* $\mathfrak{S}$ *ein System von endlich oder unendlich vielen Teilkörpern eines Körpers* $\mathfrak{k}$, *so gibt es in* $\mathfrak{k}$ *Elemente (z. B.* 0, ε*), die in allen Körpern des Systems* $\mathfrak{S}$ *vorkommen. Die Gesamtheit dieser Elemente stellt wiederum einen Körper dar.*

Wir wollen diesen Körper als den *Durchschnitt* des Körpersystems $\mathfrak{S}$ bezeichnen. — Dem Satz 1. stellt sich ein zweiter, nicht minder wichtiger an die Seite:

2. *Bezeichnet* $\mathfrak{U}$ *ein System von endlich oder unendlich vielen Körpern von der Beschaffenheit, daß je zwei Körper* $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ *aus* $\mathfrak{U}$ *allemal in wenigstens einem Körper* $\mathfrak{k}_3$ *des Systems* $\mathfrak{U}$ *enthalten sind, so gibt es einen bestimmten (nicht notwendig in* $\mathfrak{U}$ *vorkommenden) Körper* $\mathfrak{k}$, *welcher alle Körper des Systems* $\mathfrak{U}$ *zu Teilkörpern hat und keine anderen Elemente enthält als solche, welche in Körpern von* $\mathfrak{U}$ *auftreten.*

Beweis: Es bezeichne $\mathfrak{k}$ das System aller Elemente, welche in Körpern des Systems $\mathfrak{U}$ auftreten. Hat man Elemente aus $\mathfrak{k}$ in endlicher Anzahl $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und ist $\mathfrak{k}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ ein Körper aus $\mathfrak{U}$, welcher a_i enthält, so gibt es in $\mathfrak{U}$ einen Körper $\mathfrak{k}_2'$, welcher $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$, einen Körper $\mathfrak{k}_3'$, welcher $\mathfrak{k}_2'$ und $\mathfrak{k}_3$ enthält u. s. f. Es gibt also in $\mathfrak{U}$ Körper, welche alle Körper $\mathfrak{k}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ und damit alle Elemente a_i enthalten. Sind nun a, b irgend zwei Elemente aus $\mathfrak{k}$, und ist $\mathfrak{k}'$ irgend ein Körper aus $\mathfrak{U}$, welcher a und b enthält, so haben $a+b$ und $a \cdot b$ in $\mathfrak{k}'$ eine bestimmte Bedeutung. Ist $\mathfrak{k}''$ irgendein anderer zu $\mathfrak{U}$ gehöriger, a und b enthaltender Körper, so haben auch in diesem $a+b$ und $a \cdot b$ eine bestimmte Bedeutung. Daß aber $a+b$ und $a \cdot b$ in $\mathfrak{k}''$ nichts anderes bezeichnen können wie in $\mathfrak{k}'$ ist eine Folge der Voraussetzung, daß es einen Körper gibt, der $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{k}''$ enthält. Somit sind Summe und Produkt zweier Elemente aus $\mathfrak{k}$ unzweideutig definiert, d. h. $\mathfrak{k}$ ist ein System mit doppelter Komposition. Aus dem Umstande, daß je zwei Elemente aus

$\mathfrak{K}$ in Körpern aus $\mathfrak{U}$ gleichzeitig auftreten, folgt nunmehr, daß die Kompositionsgesetze 2. und 4. des § 1 bestehen, ferner, daß wenigstens ein Element x_1, und wenn $a \neq 0$, wenigstens ein Element x_2 in $\mathfrak{K}$ vorkommt, für welche $a + x_1 = b$, $a \cdot x_2 = b$ wird. Da auch drei Elemente aus $\mathfrak{K}$ in einem Körper aus $\mathfrak{U}$ vorkommen, so folgt, daß auch die Kompositionsgesetze 1., 3. und 5. erfüllt sind. Da endlich dasselbe auch für 4 Elemente a, b, x, y aus $\mathfrak{K}$ gilt, so können die Gleichungen $a + x = b$, $a + y = b$ und, wenn $a \neq 0$, auch die Gleichungen $a \cdot x = b$, $a \cdot y = b$ nur dann bestehen, wenn $x = y$ ist. Das System $\mathfrak{K}$ ist also ein Körper, und es leuchtet unmittelbar ein, daß $\mathfrak{K}$ alle Körper aus $\mathfrak{U}$ enthält und nur solche Elemente besitzt, die in den Körpern aus $\mathfrak{U}$ auftreten; ebenso aber auch, daß ein Körper, welcher diese beiden Eigenschaften besitzt, notwendig mit $\mathfrak{K}$ identisch sein muß.

Ist der Körper $\mathfrak{K}$ in dem Körper $\mathfrak{L}$ enthalten, $\mathfrak{S}$ irgend ein System von Elementen aus $\mathfrak{L}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ den Durchschnitt aller derjenigen Körper zwischen*) $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, welche alle Elemente des Systems $\mathfrak{S}$ enthalten. Von dem Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ sagen wir, er sei aus $\mathfrak{K}$ durch *Adjunktion* des Systems $\mathfrak{S}$ hervorgegangen. $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ kann gleich $\mathfrak{L}$ sein, und ist z. B. dann gleich $\mathfrak{L}$, wenn $\mathfrak{S} = \mathfrak{L}$ ist. $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ kann aber auch gleich $\mathfrak{K}$ sein; dieser Fall tritt dann ein, wenn alle Elemente von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{K}$ gehören. Geht aus einem Körper $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines Systems $\mathfrak{S}_1$ ein zweiter, aus diesem durch Adjunktion eines Systems $\mathfrak{S}_2$ ein dritter hervor u. s. f., so bezeichnen wir, wenn nacheinander $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ adjungiert wurden, den zuletzt erhaltenen Körper mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n)$. Wie man leicht sieht, kommt es für das Endresultat auf die Reihenfolge der Systeme $\mathfrak{S}$ nicht an. — Es gehe aus einem Körper $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines Systems $\mathfrak{S}$ von unendlich vielen Elementen der Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ hervor. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}$ das System derjenigen Körper, welche aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion je eines *endlichen* Teilsystems von $\mathfrak{S}$ hervorgehen. Dann sind alle Körper aus $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ enthalten. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ irgend zwei Körper aus $\mathfrak{U}$, so hat man $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}(\mathfrak{S}_1), \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}(\mathfrak{S}_2)$, wo $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ endliche Teilsysteme von $\mathfrak{S}$ sind. Bezeichnet $\mathfrak{S}_3$ dasjenige Teilsystem von $\mathfrak{S}$, welches alle Elemente aus $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, aber kein anderes Element enthält, so ist auch $\mathfrak{S}_3$ endlich; der

---

*) Ein Körper liegt „zwischen“ $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, wenn er $\mathfrak{K}$ enthält und in $\mathfrak{L}$ enthalten ist.

Körper $\mathfrak{K}_3 = \mathfrak{K}(\mathfrak{S}_3)$, welcher $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ enthält, gehört also auch zu $\mathfrak{U}$. Somit erfüllt das System $\mathfrak{U}$ die Voraussetzung des Satzes 2.; es existiert daher ein bestimmter Körper $\mathfrak{L}$, welcher alle Körper des Systems $\mathfrak{U}$, mithin auch $\mathfrak{K}$ und alle Elemente aus $\mathfrak{S}$, also auch $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ enthält, der aber auch nur solche Elemente enthält, die in Körpern des Systems $\mathfrak{U}$ auftreten. Da aber alle diese Elemente auch schon in $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ auftreten, so ist der in Rede stehende Körper mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ identisch. Wir erhalten daher den Satz:

3. *Ist $\mathfrak{S}$ ein unendliches System, so kommt jedes Element des Körpers $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ — ebenso jedes System von endlich vielen Elementen aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ — in einem Körper vor, der aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines endlichen Teilsystems von $\mathfrak{S}$ hervorgeht.*

§ 3.

Integritätsbereiche.

Unter *Integritätsbereich* soll hier ein System mit doppelter Komposition verstanden werden, welches die Bedingungen 1. bis 6. des § 1 erfüllt, nicht nur aus dem einen Elemente 0 besteht, eine Einheit besitzt, und in welchem das Produkt zweier von 0 verschiedener Elemente stets wieder von 0 verschieden ist. Unter Einheit ist dabei ein Element ε zu verstehen, für welches die Gleichung $x\varepsilon = x$ durch alle Elemente des Systems befriedigt wird; es ist sofort zu sehen, daß nicht mehr als eine Einheit existieren kann.

Jeder Körper ist zugleich Integritätsbereich, während das System der ganzen Zahlen beweist, daß nicht jeder Integritätsbereich ein Körper ist. — Die in § 2 über Körper angestellten Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf Integritätsbereiche ausdehnen. Ein Teilsystem $\mathfrak{J}'$ eines Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$ stellt einen Integritätsbereich dar, wenn es die Einheit enthält, und wenn Summe, Differenz, Produkt zweier Elemente aus $\mathfrak{J}'$ stets wieder zu $\mathfrak{J}'$ gehören. Die Sätze 1., 2. des § 2 gelten, wie man sofort sieht, auch für Integritätsbereiche; man hat in ihnen nur das Wort (Teil-) Körper überall durch (Teil-) Integritätsbereich zu ersetzen. Die *Adjunktion* bei Integritätsbereichen bezeichnen wir durch eckige Klammern, so daß $\mathfrak{J}[\mathfrak{S}]$ einen Integritätsbereich $\overline{\mathfrak{J}}$ darstellt, der den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ und das Elementensystem $\mathfrak{S}$ umfaßt und so beschaffen ist, daß $\mathfrak{S}$ nicht schon in einem von $\overline{\mathfrak{J}}$ verschiedenen zwischen $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}[\mathfrak{S}]$ gelegenen Integritäts-

bereich enthalten ist. Wenn $\mathfrak{J}$ ein Körper ist, so hat man hiernach zwischen $\mathfrak{J}[\mathfrak{S}]$ und $\mathfrak{J}(\mathfrak{S})$ zu unterscheiden. — Nunmehr läßt sich, wie sofort ersichtlich, auch der Satz 3. des § 2 auf Integritätsbereiche ausdehnen.

Sind a und b Elemente eines Integritätsbereichs $\mathfrak{J}$, so sagen wir: *b ist teilbar durch a, a geht in b auf, ist ein Teiler von b* u. s. f., wenn es in $\mathfrak{J}$ ein Element x gibt, für welches die Gleichung $ax=b$ erfüllt ist. Sind b und c durch a teilbar, so gilt dasselbe für $b+c$, $b-c$ und für $b\cdot d$, wenn d ein beliebiges Element aus $\mathfrak{J}$ ist. Der Begriff der Teilbarkeit ist jedoch ein relativer, von dem betrachteten Integritätsbereich abhängiger; ist das Element b in $\mathfrak{J}$ durch a nicht teilbar, so kann es doch in einem erweiterten Bereiche durch a teilbar werden.

Quotientenbildung: — Es sei ein Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ in einem Körper $\mathfrak{L}$ enthalten. Bezeichnen wir durch die einzelnen Buchstaben Elemente aus $\mathfrak{J}$, so gilt in $\mathfrak{L}$ nach den für jeden Körper bestehenden Gesetzen:

1) besteht eine der Gleichungen $a=\frac{a'}{b'}$, $\frac{a'}{b'}=a$, $ab'=a'$, so bestehen auch die beiden anderen,

2) aus $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ folgt $ab'=a'b$, und umgekehrt,

3) $$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}=\frac{ab'+a'b}{bb'},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}=\frac{aa'}{bb'},$$

4) $$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{ab'-a'b}{bb'},\quad \frac{a}{b}:\frac{a'}{b'}=\frac{ab'}{a'b}.$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß die Nenner von 0 verschieden sind, während im übrigen die Buchstaben beliebige Elemente aus $\mathfrak{J}$ bezeichnen. Aus 3), 4) ist zu ersehen, daß diejenigen Elemente von $\mathfrak{L}$, die sich als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{J}$ darstellen, einen Körper $\mathfrak{K}$ bilden, aus 1) — weil hiernach $\frac{a}{\varepsilon}=a$ —, daß $\mathfrak{K}$ den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ umfaßt. Wir sagen: $\mathfrak{K}$ geht durch *Quotientenbildung* aus $\mathfrak{J}$ hervor. Einen solchen Körper muß es also geben, sobald überhaupt $\mathfrak{J}$ in einem Körper $\mathfrak{L}$ enthalten sein kann. Um diese Möglichkeit zu prüfen, hat man daher nur zu untersuchen, ob es statthaft ist, für die Ausdrücke von der Form $\frac{a}{b}$ die Begriffe *Gleichheit*, *Summe*, *Produkt* durch 1), 2), 3) zu definieren, und ob man so zu einem $\mathfrak{J}$ enthaltenden Körper gelangt. Daß dies in der Tat bei jedem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ der Fall ist, ergibt sich leicht. Prüfen wir z. B. die

Definition der Gleichheit, so ergeben sich aus der Annahme $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$ nach 2) die Gleichungen $ab' = a'b$, $a'b'' = a''b'$, aus diesen, nach den in $\mathfrak{J}$ geltenden Gesetzen, durch Multiplikation: $ab'a'b'' = a'ba''b'$, also, da $b' \neq 0$ ist, $ab''a' = a''ba'$ und, wenn $a' \neq 0$ ist, $ab'' = a''b$. Ist aber $a' = 0$, so folgt aus $ab' = a'b$, $a'b'' = a''b'$, $b \neq 0$, $b' \neq 0$, daß $a = 0$, $a'' = 0$, mithin wiederum $ab'' = a''b$ ist. In jedem Falle folgt so aus $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$, daß auch $\frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}$ ist; und Entsprechendes gilt auf Grund von 1) auch, wenn man nicht 3 Quotienten, sondern etwa nur zwei und ein einzelnes Element aus $\mathfrak{J}$ betrachtet usf. Ferner folgt aus $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ auf Grund von 2), daß umgekehrt $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ ist. Endlich ist nach 2) stets $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$. Was die Definitionen von Summe und Produkt anlangt, so hat man nachzuweisen, daß sie eindeutig sind, d. h. daß das Resultat sich nicht ändert, wenn man einen Summanden oder Faktor durch einen ihm gleichen ersetzt. Ist dies geschehen, so ist erwiesen, daß ein System mit doppelter Komposition vorliegt, und es ist weiter zu zeigen, daß alle 7 in § 1 angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Auf Grund von 1) enthält der Körper dann den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$. — Alle diese Untersuchungen erledigen sich in ähnlicher Weise wie der Nachweis für die Berechtigung der durch 1), 2) gegebenen Definition der Gleichheit, und es erübrigt sich daher, auf die Einzelheiten der Beweisführung näher einzugehen.

Der Körper $\mathfrak{K}$, welcher aus $\mathfrak{J}$ durch Quotientenbildung hervorgeht, ist natürlich, wenn $\mathfrak{J}$ ein Körper ist, mit $\mathfrak{J}$ identisch. Dieser Fall liegt immer vor, wenn $\mathfrak{J}$ nur endlich viele, sagen wir m Elemente enthält. Denn sind alsdann $a(\neq 0)$ und b Elemente von $\mathfrak{J}$, so durchläuft mit x zugleich ax alle m Elemente von $\mathfrak{J}$, wird also einmal gleich b, d. h. die Bedingung 7 des § 1 ist erfüllt, $\mathfrak{J}$ ist ein Körper. — Aus isomorphen Integritätsbereichen gehen durch Quotientenbildung, wie sofort ersichtlich, isomorphe Körper hervor.

§ 4.

Primkörper. Charakteristik.

Um einen Einblick in die verschiedenen möglichen Körpertypen zu gewinnen, haben wir zunächst auf die Bildung der einfachsten Körper aus-

zugehen, sodann zu untersuchen, wie aus einmal vorhandenen Körpern durch Erweiterung neue abgeleitet werden können. Die erste Aufgabe führt auf den Begriff des *Primkörpers*. Hierunter verstehen wir einen Körper, welcher außer sich selbst keinen Teilkörper besitzt. Es gilt der Satz:

1. *In jedem Körper* $\mathfrak{K}$ *ist ein und nur ein Primkörper enthalten.* Es bezeichne nämlich $\mathfrak{U}$ das System aller Teilkörper von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$ ihren Durchschnitt. $\mathfrak{P}$ ist selbst ein zu $\mathfrak{U}$ gehöriger Körper, und wenn $\mathfrak{P}'$ Teilkörper von $\mathfrak{P}$ ist, so gehört $\mathfrak{P}'$ ebenfalls zu $\mathfrak{U}$, muß also $\mathfrak{P}$ enthalten, daher mit $\mathfrak{P}$ identisch sein. Somit ist $\mathfrak{P}$ Primkörper. Ist andererseits $\mathfrak{T}$ Teilkörper von $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{P}$ Teilkörper von $\mathfrak{T}$; soll also $\mathfrak{T}$ Primkörper sein, so muß $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{P}$ identisch sein.

In gleicher Weise definieren wir als *Prim-Integritätsbereich* einen solchen, welcher außer sich selbst keinen Integritätsbereich enthält. Der Durchschnitt aller in einem Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ enthaltenen Integritätsbereiche stellt den einzigen in $\mathfrak{J}$ enthaltenen Prim-Integritätsbereich dar.

Es sei nun $\mathfrak{K}$ ein System, das wir zunächst nur als Integritätsbereich voraussetzen wollen, α ein Element von $\mathfrak{K}$. Wir setzen

$$\alpha = 1\alpha,\ \alpha + \alpha = 2\alpha,\ 2\alpha + \alpha = 3\alpha, \ldots,$$

wobei $1, 2, 3, \ldots$ als abkürzende Zeichen, nicht aber als Elemente von $\mathfrak{K}$ aufzufassen sind. Die Elemente $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ heißen die *natürlichen Vielfachen von* α. Bezeichnet ferner $-n$ eine negative ganze Zahl, so setzen wir

$$-(n\alpha) = (-n)\alpha.$$

Hierdurch ist für jede ganze Zahl m das Element $m\alpha$ erklärt. Die Elemente $m\alpha$ heißen die *ganzzahligen Vielfachen von* α. Für $\alpha = \varepsilon$ ergeben sich, wenn m, m' ganze Zahlen bedeuten, sofort die Gleichungen

$$(1.)\quad m\varepsilon + m'\varepsilon = (m+m')\varepsilon,\ m\varepsilon - m'\varepsilon = (m-m')\varepsilon,\ (m\varepsilon)\cdot(m'\varepsilon) = (mm')\varepsilon,$$

aus denen hervorgeht, daß die ganzzahligen Vielfachen von ε einen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ bilden. Da jeder in $\mathfrak{K}$ enthaltene Integritätsbereich die Einheit ε, also auch die ganzzahligen Vielfachen von ε enthält, so stellt $\mathfrak{J}$ den in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Prim-Integritätsbereich dar. Ist $\mathfrak{K}$ ein Körper, $\mathfrak{P}$ der in $\mathfrak{K}$ enthaltene Primkörper, so enthält $\mathfrak{P}$ alle Elemente von $\mathfrak{J}$, da-

her auch alle Quotienten aus Elementen von $\mathfrak{J}$. Da aber diese bereits einen Körper bilden, so ist mit ihnen der Primkörper $\mathfrak{P}$ erschöpft.

Es sind nun zwei Fälle denkbar: Entweder nämlich sind die ganzzahligen Vielfachen von ε alle voneinander verschieden, d. h. es ist nur dann $m\varepsilon = m'\varepsilon$, wenn $m = m'$ ist, oder es kann jene Gleichung auch ohne diese statthaben. Im ersten Fall hat man eine ein-eindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{J}$ und dem System der ganzen Zahlen, welche sich zufolge (1.) als isomorph erweist. Ist $\mathfrak{K}$ ein Körper, so folgt hieraus weiter, daß der in $\mathfrak{K}$ enthaltene Primkörper $\mathfrak{P}$ mit dem Körper der rationalen Zahlen isomorph ist. Im zweiten Falle gibt es natürliche Vielfache von ε, die gleich 0 sind. Ist p die kleinste natürliche Zahl, für welche $p \cdot \varepsilon = 0$ wird, und sind m, m' natürliche Zahlen $< p$, so folgt aus $m\varepsilon \neq 0$, $m'\varepsilon \neq 0$, daß $(mm')\varepsilon = (m\varepsilon)\cdot(m'\varepsilon) \neq 0 = p\varepsilon$, also $mm' \neq p$ ist. p ist also nicht Produkt irgend zweier kleinerer Zahlen, mithin Primzahl. Wir nennen p die *Charakteristik* von $\mathfrak{K}$, während wir in dem zuerst besprochenen Falle $\mathfrak{K}$ die *Charakteristik* 0 beilegen. *Sonach kommt jedem Integritätsbereich eine Charakteristik zu, welche entweder* 0 *oder eine Primzahl ist.* Ist die Charakteristik eine Primzahl p, so folgt weiter, daß dann und nur dann $m\varepsilon = m'\varepsilon$ wird, wenn $m \equiv m' \pmod{p}$ ist. Dies zeigt in Verbindung mit den Gleichungen (1.), daß hier der Prim-Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ mit dem System der Restklassen der Primzahl p isomorph ist, und da dieses System bereits ein Körper ist, so wird hier $\mathfrak{J} = \mathfrak{P}$. Somit ergibt sich:

2. *Die einzigen Primkörper, welche existieren, sind die Körper vom Typus des Körpers der rationalen Zahlen (den wir fortan durch $\mathfrak{P}_0$ bezeichnen) und die vom Typus des Restklassensystems einer Primzahl p (fortan durch $\mathfrak{P}_p$ bezeichnet).*

Aus dem Vorangehenden folgt weiter:

3. *Alle Teilkörper eines Körpers $\mathfrak{K}$ haben dieselbe Charakteristik wie $\mathfrak{K}$.*

Ist α irgendein Element eines Körpers $\mathfrak{K}$, m eine ganze Zahl, so ist $m\alpha = (m\varepsilon)\cdot\alpha$; ist also $\alpha \neq 0$, so ist $m\alpha$ nur dann $= 0$, wenn $m\varepsilon = 0$ ist. Also:

4. *Ein ganzzahliges Vielfaches $m\alpha$ eines von* 0 *verschiedenen Elementes α im Körper $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann $= 0$, wenn entweder $m = 0$ oder die Charakteristik von $\mathfrak{K}$ eine Primzahl und m durch diese Primzahl teilbar ist.*

Natürlich gelten diese Sätze auch für Integritätsbereiche.

§ 5.

Äquivalente Erweiterungen. Einfache Erweiterungen. Transzendente und algebraische Elemente. Adjunktion eines transzendenten Elementes. Ganze und rationale Funktionen.

Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ Erweiterungskörper eines Körpers $\mathfrak{K}$, so sagen wir: *$\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ stellen äquivalente Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ dar*, wenn $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ in der Weise isomorph aufeinander abgebildet werden können, daß jedes Element von $\mathfrak{K}$ sich selbst entspricht. — Die Äquivalenz zweier Erweiterungen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ setzt also den Isomorphismus voraus; es können aber sehr wohl auch nicht-äquivalente Erweiterungen eines Körpers isomorphe Körper ergeben. — Liegt die Aufgabe vor, einen Körper so zu erweitern, daß der neu entstandene Körper gewissen Bedingungen genügt, und zeigt es sich, daß alle Erweiterungen, welche die gestellten Bedingungen erfüllen, äquivalent sind, so sagen wir, *daß die Erweiterungsaufgabe im wesentlichen nur eine Lösung hat.* In diesem Sinne ist z. B. die Aufgabe, den Körper $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen so zu erweitern, daß jedes Element des neuen Körpers einer algebraischen Gleichung in $\mathfrak{R}$ genügt, aber nicht jedes schon in $\mathfrak{R}$ enthalten ist, im wesentlichen nur auf eine Weise lösbar.

Als die einfachsten Erweiterungen eines Körpers $\mathfrak{K}$ bieten sich diejenigen dar, welche aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines einzigen Elementes hervorgehen. Wir bezeichnen dieselben als *einfache* Erweiterungen, und wir nennen, wenn $\mathfrak{L}$ eine solche ist, jedes Element α von $\mathfrak{L}$, für welches $\mathfrak{K}(\alpha)=\mathfrak{L}$ wird, ein *primitives Element von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$*. — Es gehe durch Adjunktion eines Elementes x aus $\mathfrak{K}$ der Körper $\mathfrak{K}(x)$ hervor. Zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}(x)$ liegt der Integritätsbereich $\mathfrak{K}[x]$ (§ 3). Derselbe enthält alle Elemente von der Form

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n,$$

worin die Koeffizienten c beliebige Elemente aus $\mathfrak{K}$ sind. Zur bequemeren Darstellung denken wir uns die genannten Elemente aus $\mathfrak{K}[x]$ in der Form unendlicher Reihen

$$\text{(1.)} \qquad \Sigma c_k x^k$$

geschrieben, wobei natürlich immer vorausgesetzt ist, daß von einem be-

stimmten Index k an alle Koeffizienten gleich 0 sind. Dann gelten die Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \Sigma a_k x^k + \Sigma b_k x^k = \Sigma (a_k + b_k) x^k, \\ (\Sigma a_k x^k) \cdot (\Sigma b_k x^k) = \Sigma c_k x^k, \ (c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0), \end{cases}$$

und

$$(3.)\qquad \Sigma a_k x^k - \Sigma b_k x^k = \Sigma (a_k - b_k) x^k,$$

aus denen hervorgeht, daß die Elemente der Form (1.) sich durch Addition, Subtraktion, Multiplikation reproduzieren. Da alle Elemente aus $\mathfrak{R}$, so insbesondere auch ε, unter den Elementen von der Form (1.) enthalten sind, so bilden diese Elemente einen $\mathfrak{R}$ umfassenden Integritätsbereich und dieser muß, weil er auch x enthält, mit $\mathfrak{R}[x]$ identisch sein. Der Körper $\mathfrak{R}(x)$ enthält den Integritätsbereich $\mathfrak{R}[x]$, also auch einen bestimmten Körper $\mathfrak{L}$, der aus $\mathfrak{R}[x]$ durch Quotientenbildung hervorgeht (§ 3). Da aber $\mathfrak{L}$ sowohl $\mathfrak{R}$ wie x umfaßt, so ist $\mathfrak{R}(x)$ mit $\mathfrak{L}$ identisch.

Wie bei der Bildung der einfachsten Körper, so haben wir auch bei der Bildung der einfachsten Erweiterungen zwei Fälle zu unterscheiden. Der erste entspricht der Annahme, daß zwei Elemente $\Sigma a_k x^k$, $\Sigma b_k x^k$ aus $\mathfrak{R}[x]$ immer nur dann einander gleich sind, wenn für jedes k $a_k = b_k$ wird, der zweite der gegenteiligen. Wir nennen im ersten Falle das Element x *transzendent*, im zweiten *algebraisch in bezug auf* $\mathfrak{R}$, und wollen gleich hier noch einige weitere für die Folge wichtige Bezeichnungen einführen: Ist $\mathfrak{L}$ ein beliebiger Erweiterungskörper von $\mathfrak{R}$, so heißen n Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $\mathfrak{L}$ *linear abhängig* oder *linear unabhängig in bezug auf* $\mathfrak{R}$, je nachdem eine lineare homogene Relation

$$a_0 \alpha_0 + \cdots + a_n \alpha_n = 0,$$

in welcher die Koeffizienten a Elemente aus $\mathfrak{R}$ und nicht sämtlich gleich 0 sind, existiert oder nicht existiert. Die Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein, aber es ist klar, daß sie, wenn gleiche unter ihnen vorkommen, stets linear abhängig sind. Wir bemerken ferner, daß die Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ linear abhängig sind, wenn schon ein Teil von ihnen linear abhängig ist, und gelangen auf Grund hiervon zu einer Ausdehnung unserer Definition auf Systeme von unendlich vielen Elementen. Ein System $\mathfrak{S}$ von unendlich vielen Elementen

aus $\mathfrak{L}$ bezeichnen wir als linear abhängig oder unabhängig in bezug auf $\mathfrak{k}$, je nachdem ein *endliches* Teilsystem von $\mathfrak{S}$, welches in bezug auf $\mathfrak{k}$ linear abhängig ist, existiert oder nicht existiert. Die oben getroffene Unterscheidung zwischen (relativ) transzendenten und algebraischen Elementen kann nunmehr auch so formuliert werden: *Das Element x ist in bezug auf $\mathfrak{k}$ transzendent oder algebraisch, je nachdem seine Potenzen*

$$\varepsilon, x, x^2, \ldots x^n, \ldots$$

in bezug auf $\mathfrak{k}$ linear unabhängig oder abhängig sind.

Wir fassen zunächst die Adjunktion eines *transzendenten* Elementes ins Auge, die im gegenwärtigen Paragraphen allein behandelt werden soll. Hier gilt:

1. *Jeder Körper $\mathfrak{k}$ kann durch Adjunktion eines transzendenten Elementes x erweitert werden.*

Bilden wir nämlich mittels der Elemente von $\mathfrak{k}$ alle Ausdrücke von der Form (1.), bestimmen wir, daß zwei solche Ausdrücke $\Sigma a_k x^k$, $\Sigma b_k x^k$ nur dann als gleich gelten sollen, wenn für jedes k $a_k = b_k$ wird, und setzen wir die Gleichungen (2.) als Definitionen für Addition und Multiplikation fest, so haben wir ein $\mathfrak{k}$ umfassendes System mit doppelter Komposition geschaffen, welches, wie die direkte Ausrechnung sofort ergibt, den Bedingungen 1.—6. des § 1 entspricht. Sind ferner $\alpha = \Sigma a_k x^k$ und $\beta = \Sigma b_k x^k$ zwei von 0 verschiedene Elemente dieses Systems, a_m, b_n die letzten von 0 verschiedenen Koeffizienten, so wird in dem Produkt $\alpha \cdot \beta = \Sigma c_k x^k$ der Koeffizient $c_{m+n} = a_m \cdot b_n \neq 0$, also $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Da das System auch eine Einheit enthält, so stellt es einen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ dar, und da alle Elemente von $\mathfrak{J}$ aus x und den Elementen von $\mathfrak{k}$ durch Addition und Multiplikation gebildet sind, so ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{k}[x]$. Aus $\mathfrak{J}$ erhält man aber, wie aus jedem Integritätsbereich, durch Quotientenbildung einen Körper, den Körper $\mathfrak{k}(x)$.

2. *Alle Erweiterungen eines Körpers, welche durch Adjunktion eines transzendenten Elementes entstehen, sind äquivalent.*

Denn sind $\mathfrak{k}(x)$, $\mathfrak{k}(y)$ zwei solche Erweiterungen, und ordnet man jedem Element von $\mathfrak{k}(x)$, das man sich in der Form eines Quotienten zweier Elemente von der Form (1.) dargestellt denkt, dasjenige Element von $\mathfrak{k}(y)$ zu, welches man erhält, indem man x durch y ersetzt, so ist

leicht zu sehen, daß man eine isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{K}(x)$ und $\mathfrak{K}(y)$ hat, bei welcher jedes Element von $\mathfrak{K}$ sich selbst entspricht.

Die Elemente des Körpers $\mathfrak{K}(x)$ nennen wir auch *rationale*, die des Integritätsbereiches $\mathfrak{K}[x]$ *ganze Funktionen der Transzendenten oder Unbestimmten x im Körper* $\mathfrak{K}$ und verwenden zu ihrer Bezeichnung in der üblichen Weise die Funktionszeichen $f(x)$, $g(x)$, usw. Eine ganze Funktion

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

heißt vom *Grade* n, wenn $c_n \neq 0$ ist, so daß die ganzen Funktionen vom Grade 0 durch die von 0 verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{K}$ dargestellt werden. Dem Element 0 schreiben wir keinen Grad zu; wird jedoch von einer ganzen Funktion ausgesagt, daß ihr Grad unterhalb einer gewissen Grenze liegt, so soll immer der Fall mit inbegriffen sein, daß die Funktion gleich 0 ist.

Sind $f(x)$ und $g(x)$ ganze Funktionen der Unbestimmten x im Körper $\mathfrak{K}$ und ist $g(x) \neq 0$, n der Grad von $g(x)$, so kann man durch das bekannte Divisionsverfahren im Körper $\mathfrak{K}$ zwei ganze Funktionen $q(x)$ und $r(x)$ so bestimmen, daß erstens

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) \tag{4.}$$

und zweitens der Grad von $r(x) < n$ wird. Die Funktionen $q(x)$ und $r(x)$ sind durch die beiden Forderungen eindeutig bestimmt. Die Gleichung $r(x) = 0$ besagt, daß $f(x)$ durch $g(x)$ teilbar ist. Es kann auch sein, daß jede der Funktionen $f(x)$, $g(x)$ durch die andere teilbar ist; dann unterscheiden sie sich nur um einen Faktor vom Grade 0, der also ein Element aus $\mathfrak{K}$ ist. Zwei solche Funktionen sind in allen die Teilbarkeit betreffenden Fragen als im wesentlichen gleich anzusehen. Auf der eindeutigen Bestimmtheit der in (4.) auftretenden Funktionen $q(x)$, $r(x)$ beruht es, daß es für diese Fragen (im Gegensatz zu den später behandelten der Irreduzibilität) gleichgiltig ist, in welchem Körper $\mathfrak{K}$ die Funktionen betrachtet werden; es muß nur eben ein Körper sein, dem die Koeffizienten der Funktionen als Elemente angehören, während x in bezug auf ihn transzendent ist. — Dies gilt auch für die Frage nach dem *größten gemeinsamen Teiler* $t(x)$ zweier ganzer Funktionen $f(x)$, $g(x)$, in welchem jeder gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $g(x)$ aufgeht. $t(x)$ ist gleich 0, wenn

$f(x)=0, g(x)=0$ ist, sonst von 0 verschieden und nur bis auf einen Faktor vom Grade 0 bestimmt. Um $t(x)$ eindeutig zu fixieren, setzen wir fest, daß der Koeffizient der höchsten Potenz von x gleich der Einheit sein soll, und bezeichnen den so bestimmten größten gemeinsamen Teiler $t(x)$ von $f(x)$ und $g(x)$ durch

$$(f(x), g(x)).$$

Das *Euler*sche Verfahren lehrt $t(x)$ finden und in der Form

$$t(x)=f(x)\cdot g_1(x)+g(x)\cdot f_1(x) \tag{5.}$$

darstellen. Die hier auftretenden ganzen Funktionen $f_1(x), g_1(x)$ sind eindeutig bestimmt, wenn gefordert wird, daß ihre Grade bzw. kleiner sein sollen als die Grade von $f(x)$ und $g(x)$; sie gehören wie $t(x)$ zu jedem Körper, zu dem die Funktionen $f(x), g(x)$ gehören. Durch die Gleichung

$$(f(x), g(x))=\varepsilon$$

wird ausgedrückt, daß $f(x)$ und $g(x)$ *teilerfremd* sind.

Vom *Euler*schen Algorithmus aus gelangt man in bekannter Weise weiter zu den Sätzen

3. *Ist $f(x)$ zu $g(x)$ teilerfremd, $f(x)\cdot h(x)$ durch $g(x)$ teilbar, so ist $h(x)$ durch $g(x)$ teilbar.*

4. *Sind $f(x)$ und $h(x)$ zu $g(x)$ teilerfremd, so ist auch $f(x)\cdot h(x)$ zu $g(x)$ teilerfremd.*

Es werde der Körper $\mathfrak{k}$ durch Adjunktion eines transzendenten Elementes x zu $\mathfrak{k}(x)$ erweitert. Jedes Element ξ von $\mathfrak{k}(x)$ läßt sich dann auf unendlich viele Weisen als Quotient zweier Elemente $f(x), g(x)$ von $\mathfrak{k}[x]$ darstellen. Durch Kürzen mit dem größten gemeinsamen Teiler kann man bewirken, daß Zähler und Nenner teilerfremd sind, sodann kann durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit einem Element aus $\mathfrak{k}$ bewirkt werden, daß im Nenner der Koeffizient der höchsten Potenz gleich ε wird. So erhalten wir eine „reduzierte" Darstellung von ξ, und es gibt nur eine solche. Denn nehmen wir zwei reduzierte Darstellungen von ξ an

$$\xi=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

so folgt

$$f(x)\cdot g_1(x)=f_1(x)\cdot g(x),$$

und hieraus, weil $g(x)$ zu $f(x)$ teilerfremd ist, aber in dem Produkt $f(x)\cdot g_1(x)$ aufgeht, daß $g(x)$ in $g_1(x)$ aufgehen muß. Ebenso muß $g_1(x)$ in $g(x)$ aufgehen, und da beide Funktionen ε zum Koeffizienten der höchsten Potenz haben, so ergibt sich $g(x)=g_1(x)$, $f(x)\cdot g(x)=f_1(x)\cdot g(x)$, also auch $f(x)=f_1(x)$. — Es bezeichne wieder $\xi=\frac{f(x)}{g(x)}$ die reduzierte Darstellung des Elementes ξ aus $\Re(x)$. Nehmen wir an, daß ξ in bezug auf $\Re$ algebraisch ist. Dann besteht eine Relation von der Form

$$c_0+c_1\xi+\cdots+c_n\xi^n=0, \tag{6.}$$

in welcher die Koeffizienten c dem Körper $\Re$ angehören und $c_n\neq 0$ angenommen werden darf. Wir dürfen aber, sofern $\xi\neq 0$, auch $c_0\neq 0$ annehmen. Denn wenn c_μ der erste von 0 verschiedene Koeffizient ist, so folgt aus (6.) die Gleichung

$$c_\mu+c_{\mu+1}\xi+\cdots+c_n\xi^{n-\mu}=0,$$

in welcher wieder das von ξ freie Glied ungleich 0 ist. Nehmen wir also gleich $c_0\neq 0$ an, so erhalten wir aus (6.) nach Multiplikation mit $(g(x))^n$ eine Gleichung, der wir die Formen

$$g(x)[c_0(g(x))^{n-1}+\cdots+c_{n-1}(f(x))^{n-1}]=-c_n(f(x))^n,$$
$$-c_0(g(x))^n=f(x)[c_1(g(x))^{n-1}+\cdots+c_n(f(x))^{n-1}]$$

geben können, aus denen ersichtlich ist, daß $(f(x))^n$ durch $g(x)$, $(g(x))^n$ durch $f(x)$ teilbar ist. Da aber $f(x)$ und $g(x)$ teilerfremd sind, so ist dies nach 4. nur möglich, wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom Grade 0 sind, also ξ Element des Körpers $\Re$ ist. Somit gilt der Satz:

5. *In dem Körper $\Re(x)$, welcher aus $\Re$ durch Adjunktion eines transzendenten Elementes x hervorgeht, sind alle Elemente außer denen von $\Re$ selbst in bezug auf $\Re$ transzendent.*

Dieser Satz, welcher sein Gegenstück in dem Satz 3 des § 6 findet, zeigt, daß die Erweiterungen, welche durch die Adjunktion eines transzendenten Elementes erhalten werden, von denen, welche die Adjunktion eines algebraischen Elementes liefert, durchaus verschieden sind.[1]

In dem Körper $\Re(x)$, welcher aus $\Re$ durch Adjunktion des transzendenten Elementes x hervorgeht, sind alle Elemente rationale Funktionen

von x oder natürlich auch von irgendeinem andern primitiven Elemente, während hingegen die Unterscheidung der Elemente von $\Re(x)$ als *ganze* und *gebrochene* sich auf ein bestimmtes Element x bezieht. Ein von der Wahl des primitiven Elementes unabhängiger Begriff ist (wie noch gezeigt werden soll) der *Grad einer rationalen Funktion* $R(x)$. Ist $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ die Darstellung von $R(x)$ in reduzierter Form, und sind m und n die Grade von $f(x)$ und $g(x)$, so heißt die größere der Zahlen m und n, und wenn beide gleich sind, die Zahl $m=n$ der *Grad* der rationalen Funktion $R(x)$. Wir beweisen:

6. *Eine rationale Funktion n-ten Grades von einer rationalen Funktion ν-ten Grades ($n>0$, $\nu>0$) ist eine Funktion vom Grade $n\cdot\nu$.*

Es seien in reduzierter Darstellung

$$(7.) \qquad R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \mathsf{P}(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

rationale Funktionen von x im Körper $\Re$, n und ν ihre Grade,

$$(8.) \qquad \begin{cases} f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n, & g(x)=b_0x^n+\cdots+b_n, \\ \varphi(x)=\alpha_0x^\nu+\cdots+\alpha_\nu, & \psi(x)=\beta_0x^\nu+\cdots+\beta_\nu. \end{cases}$$

Dann können weder die Elemente a_0, b_0, noch die Elemente α_0, β_0 zugleich verschwinden. Da $f(x)$ und $g(x)$ teilerfremd sind, kann man zwei ganze Funktionen $f_1(x), g_1(x)$, deren Grade $<n$ sind, so bestimmen, daß

$$(9.) \qquad f(x)\cdot g_1(x)+g(x)\cdot f_1(x)=\varepsilon$$

wird. Setzt man

$$(10.) \quad \gamma=a_0\alpha_0^n+a_1\alpha_0^{n-1}\beta_0+\cdots+a_n\beta_0^n, \quad \delta=b_0\alpha_0^n+b_1\alpha_0^{n-1}\beta_0+\cdots+b_n\beta_0^n,$$

so ist im Falle $\beta_0\neq 0$

$$\gamma=f\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)\beta_0^n, \quad \delta=g\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)\beta_0^n,$$

also nach (9.)

$$\gamma g_1\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)+\delta f_1\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)=\beta_0^n\neq 0,$$

und es können also γ und δ nicht zugleich 0 sein. Dasselbe ist aber auch der Fall, wenn $\beta_0=0$ ist. Denn alsdann ist $\alpha_0\neq 0$, $\gamma=a_0\alpha_0^n$, $\delta=b_0\alpha_0^n$, woraus, weil a_0 und b_0 nicht zugleich verschwinden, das Behauptete folgt.

Nun stellen aber γ und δ die Koeffizienten der $n \cdot \nu$-ten Potenz von x in den ganzen Funktionen

$$(11.) \qquad \begin{cases} \sigma(x) = a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} \psi + \cdots + a_n \psi^n, \\ \tau(x) = b_0 \varphi^n + b_1 \varphi^{n-1} \psi + \cdots + b_n \psi^n \end{cases}$$

dar (wo φ und ψ für $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ geschrieben ist). Von den Funktionen $\sigma(x)$ und $\tau(x)$, deren keine, wie aus (11.) und (8.) ersichtlich ist, den Grad $n \cdot \nu$ überschreitet, muß also wenigstens eine diesen Grad erreichen. Nach (8.) ist

$$(12.) \qquad \sigma(x) = f\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\psi^n, \; \tau(x) = g\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\psi^n,$$

also wegen (7.)

$$(13.) \qquad R(\mathsf{P}(x)) = \frac{\sigma(x)}{\tau(x)}.$$

Aus (12.), (9.) folgt

$$(14.) \qquad \sigma(x) \cdot g_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\psi^{n-1} + \tau(x) \cdot f_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\psi^{n-1} = \psi^{2n-1},$$

und hierin sind $g_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\psi^{n-1}$ und $f_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\psi^{n-1}$ ganze Funktionen von x. Setzen wir, indem wir die oben eingeführte Bezeichnung des größten gemeinsamen Teilers anwenden,

$$(15.) \qquad (\sigma(x), \tau(x)) = t(x),$$

$$(16.) \qquad (t(x), \psi(x)) = u(x),$$

so geht $u(x)$ in $\sigma(x), \tau(x), \psi(x)$, also zufolge (11.) auch in φ^n auf. Da aber $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ teilerfremd sind, so muß $u(x) = \varepsilon$ sein. Mithin ist $t(x)$ zu $\psi(x)$, also auch zu ψ^{2n-1} teilerfremd. Aus (15.), (14.) geht aber hervor, daß $t(x)$ in ψ^{2n-1} aufgeht. Hiernach muß $t(x) = \varepsilon$ sein, d. h. die Funktionen $\sigma(x)$, $\tau(x)$ sind teilerfremd, und da wenigstens eine von ihnen den Grad $n \cdot \nu$, keine aber einen höheren Grad hat, so ist nach (13.) der Grad der rationalen Funktion $R(\mathsf{P}(x))$ gleich $n \cdot \nu$, w. z. b. w.

Bei dem vorstehenden Beweise wurde der Satz benutzt, daß Gleichungen, welche zwischen rationalen Funktionen einer Transzendenten x in einem Körper $\mathfrak{K}$ bestehen, richtig bleiben, wenn für x irgend ein Element des Körpers $\mathfrak{K}$ oder auch irgend eines Erweiterungskörpers von $\mathfrak{K}$ eingesetzt wird, sofern nur durch diese Substitution keine verschwindenden Nenner eingeführt werden. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Umstandes, daß für Gleichheit, Summe, Produkt zweier rationaler Funktionen eines transzendenten Elementes nur solche Festsetzungen getroffen wurden, welche auf Grund der allgemeinen Eigenschaften der Körper für jedes Element x gelten, mag dasselbe transzendent sein oder nicht.

Ist y ein Element des Körpers $\mathfrak{K}(x)$, so ist $\mathfrak{K}(y)$ ein Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}(x)$. Jedes Element von $\mathfrak{K}(y)$ hat, als rationale Funktion von x in $\mathfrak{K}$ betrachtet, einen Grad, der nach 6. durch den Grad n des Elementes y teilbar ist. Soll y primitives Element von $\mathfrak{K}(x)$ in bezug auf $\mathfrak{K}$, also $\mathfrak{K}(y)=\mathfrak{K}(x)$ sein, so muß auch der Grad des Elementes x, das ist 1, durch n teilbar, also $n=1$ sein. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Ist nämlich $y=\frac{a\,x+b}{c\,x+d}$ vom Grade 1, so ist, wie leicht zu sehen, $a\,d-b\,c\neq 0$, und es wird $x=\frac{d\,y-b}{-c\,y+a}$; x gehört also dem Körper $\mathfrak{K}(y)$ an, und es ist $\mathfrak{K}(y)=\mathfrak{K}(x)$. Also:

7. *Die primitiven Elemente des Körpers $\mathfrak{K}(x)$ sind die rationalen Funktionen vom Grade* 1.

Ist z irgend ein Element des Körpers $\mathfrak{K}(x)=\mathfrak{K}(y)$, der aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion des transzendenten Elementes x oder y entsteht, so kann z als rationale Funktion von x oder y dargestellt werden:

$$z=R(x)=R_1(y).$$

Da y, als Funktion von x betrachtet, vom Grade 1 ist, so ist nach 6. der Grad von $R(x)$ in x gleich dem Grade von $R_1(y)$ in y. Somit ergibt sich:

8. *Kann der Körper $\mathfrak{L}$ aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines transzendenten Elementes erhalten werden, so kommt jedem Element von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ ein bestimmter Grad zu, welcher von der Wahl des primitiven Elementes unabhängig ist.*

Wir beweisen noch den Satz:

9. ***Werden einem Körper*** $\mathfrak{K}_0$ ***nacheinander*** n ***Elemente*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***adjungiert, wodurch die Körper***

$$\mathfrak{K}_0(x_1)=\mathfrak{K}_1, \quad \mathfrak{K}_1(x_2)=\mathfrak{K}_2, \ldots, \quad \mathfrak{K}_{n-1}(x_n)=\mathfrak{K}_n$$

entstehen, und ist jedes Element $x_k (k=1,\ldots,n)$ ***in bezug auf*** $\mathfrak{K}_{k-1}$ ***transzendent, so ist jedes Element*** x_k ***transzendent in bezug auf den Körper, der aus*** $\mathfrak{K}_0$ ***durch Adjunktion der übrigen*** $n-1$ ***Elemente hervorgeht.***

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß x_1 in bezug auf den Körper $\mathfrak{K}_0(x_2)$ transzendent ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so hätte man eine Relation

$$c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \cdots + c_m x_1^m = 0, \tag{17.}$$

in welcher die Koeffizienten c Elemente aus $\mathfrak{K}_0(x_2)$ und nicht alle gleich 0 sind. Denkt man sich die Koeffizienten c als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{K}_0[x_2]$ geschrieben und multipliziert man (17.) mit den Nennern, so erhält man eine Relation von derselben Form (17.), in welcher die Koeffizienten c nunmehr Elemente aus $\mathfrak{K}_0[x_2]$ und ebenfalls nicht sämtlich gleich 0 sind. Es sei z. B.

$$c_k = c_{k0} + c_{k1} x_2 + \cdots + c_{kr} x_2^r \neq 0;$$

dann ist wenigstens einer der Koeffizienten $c_{k0}, c_{k1}, \ldots, c_{kr}$, die sämtlich Elemente aus $\mathfrak{K}_0$ sind, etwa c_{kl}, von 0 verschieden. Wird jetzt die linke Seite von (17.) nach Potenzen von x_2 geordnet, so erhält man

$$C_0 + C_1 x_2 + C_2 x_2^2 + \cdots + C_s x_2^s = 0, \tag{18.}$$

wo die Koeffizienten C Elemente aus $\mathfrak{K}_0[x_1]$, also auch aus $\mathfrak{K}_0(x_1)$ sind und $C_l \neq 0$ ist, weil der Koeffizient der in C_l vorkommenden Potenz x_1^k gleich $c_{kl} \neq 0$ ist. Aus (18.) würde aber folgen, daß x_2 in bezug auf $\mathfrak{K}_0(x_1)=\mathfrak{K}_1$ algebraisch ist. Da dies gegen die Voraussetzung ist, so ist x_1 in bezug auf $\mathfrak{K}_0(x_2)$ transzendent. — Hiermit ist im Falle $n=2$ der Satz 9. bewiesen. Ist $n>2$, so kann man induktiv verfahren. Die Körper $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \ldots, \mathfrak{K}_n$ gehen aus $\mathfrak{K}_1$ hervor, indem nacheinander die $n-1$ Elemente $x_2, x_3, \cdots, x_n$ adjungiert werden. Da $x_k (k \geqq 2)$ in bezug auf $\mathfrak{K}_{k-1}$ transzendent ist, so ist als bewiesen zu erachten, daß jedes Element $x_k (k \geqq 2)$ in bezug auf den Körper $\mathfrak{K}_k'$ transzendent ist, welcher aus $\mathfrak{K}_1$ durch Adjunktion der übrigen Elemente der Reihe $x_2, x_3, \ldots, x_n$ hervorgeht. Dieser

Körper $\mathfrak{K}_k'$ ist aber identisch mit dem Körper, der aus $\mathfrak{K}_0$ durch Adjunktion der Elemente $x_1, \ldots, x_n$ mit Ausnahme von x_k erhalten wird. Sonach ist nur noch zu zeigen, daß auch x_1 in bezug auf $\mathfrak{K}_0(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ transzendent ist. Wird $\mathfrak{K}_0(x_2) = \mathfrak{K}_1'$ gesetzt, so ist, wie bereits gezeigt wurde, x_1 in bezug auf $\mathfrak{K}_1'$ transzendent. Aus $\mathfrak{K}_1'$ aber erhält man die Körper $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \ldots, \mathfrak{K}_n$, indem man nacheinander $x_1, x_3, \ldots, x_n$ adjungiert. Da dies wieder nur $n-1$ Elemente sind, so folgt, daß x_1 in bezug auf $\mathfrak{K}_1'(x_3, x_4, \ldots, x_n)$ transzendent ist, und da $\mathfrak{K}_1'(x_3, x_4, \ldots, x_n) = \mathfrak{K}_0(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ist, so ist auch für diesen Fall die Behauptung erwiesen.

Von dem Körper $\mathfrak{K}_n$ sagen wir, daß er aus $\mathfrak{K}_0$ durch Adjunktion von n Transzendenten oder Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hervorgeht, und nennen die Elemente von $\mathfrak{K}_n$ *rationale*, die des Integritätsbereiches $\mathfrak{K}_0[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *ganze Funktionen* dieser Unbestimmten. — Durch mehrmalige Anwendung des Satzes 2. ergibt sich, daß allgemein zwei Erweiterungen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ eines Körpers $\mathfrak{K}$, deren jede durch Adjunktion von n Transzendenten aus $\mathfrak{K}$ abgeleitet ist, äquivalent sind: Ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}(y_1, \ldots, y_n)$, so gibt es eine bestimmte isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$, welche den Elementen $x_1, \ldots, x_n$ die Elemente $y_1, \ldots, y_n$ zuordnet und jedes Element von $\mathfrak{K}$ sich selbst entsprechen läßt.

§ 6.

Adjunktion eines algebraischen Elementes.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion vom Grade n in einem Körper $\mathfrak{K}$, α ein Element aus $\mathfrak{K}$, so erhält man durch Division mit $x-\alpha$

$$f(x) = (x-\alpha)\, q(x) + r, \tag{1.}$$

wo $q(x)$ eine Funktion vom Grade $n-1$ in $\mathfrak{K}$ und r Element aus $\mathfrak{K}$ ist. Aus (1.) folgt $f(\alpha) = r$, also, wenn α Nullstelle von $f(x)$ d. h. $f(\alpha) = 0$ ist, die Zerlegung von $f(x)$ in $(x-\alpha) \cdot q(x)$, woraus man weiter schließt, daß eine ganze Funktion vom Grade n in einem Körper nicht mehr als n Nullstellen haben kann. — Aus der Darstellung des größten gemeinsamen Teilers $t(x)$ zweier ganzer Funktionen $f(x)$, $g(x)$ in § 5, (5.) geht hervor, daß jede gemeinsame Nullstelle von $f(x)$ und $g(x)$ Nullstelle von $t(x)$ sein muß, und daß daher teilerfremde Funktionen keine gemeinsame Nullstelle haben.

Reduzible und irreduzible Funktionen. — Eine ganze Funktion $f(x)$ vom Grade $n \geqq 1$, deren Koeffizienten einem Körper $\mathfrak{k}$ angehören, heißt *reduzibel in* $\mathfrak{k}$, wenn es in $\mathfrak{k}$ zwei ganze Funktionen kleineren Grades gibt, deren Produkt gleich $f(x)$ ist; andernfalls heißt $f(x)$ *irreduzibel in* $\mathfrak{k}$. Ist $\mathfrak{k}_1$ ein Teilkörper von $\mathfrak{k}$ und gehören die Koeffizienten von $f(x)$ schon dem Körper $\mathfrak{k}_1$ an, so ist klar, daß die Funktion $f(x)$, wenn sie in $\mathfrak{k}$ irreduzibel ist, auch in $\mathfrak{k}_1$ irreduzibel sein muß, dagegen kann $f(x)$ in $\mathfrak{k}_1$ irreduzibel, in $\mathfrak{k}$ reduzibel sein. — Da eine im Körper $\mathfrak{k}$ irreduzible Funktion $\varphi(x)$ zu jeder andern Funktion aus $\mathfrak{k}$, in der sie nicht aufgeht, teilerfremd ist, so ist nach § 5, 4. das Produkt zweier ganzer Funktionen $f(x), g(x)$ aus $\mathfrak{k}$ nur dann durch $\varphi(x)$ teilbar, wenn wenigstens eine der beiden Funktionen $f(x), g(x)$ durch $\varphi(x)$ teilbar ist. Hieraus folgert man in bekannter Weise, daß jede ganze Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{k}$ nur auf eine Art in irreduzible Faktoren zerlegbar ist. Dabei ist natürlich von Faktoren nullten Grades abzusehen*).

Ist $\varphi(x)$ eine ganze Funktion der Unbestimmten x im Körper $\mathfrak{k}$, $n\,(\geqq 1)$ ihr Grad und nennen wir zwei Elemente $g_1(x), g_2(x)$ aus $\mathfrak{k}[x]$ *kongruent nach dem Modul* $\varphi(x)$

$$g_1(x) \equiv g_2(x) \mod \varphi(x),$$

wenn $g_1(x) - g_2(x)$ durch $\varphi(x)$ teilbar ist, so sind alle Funktionen, die einer gegebenen kongruent sind, auch untereinander kongruent, und jede Funktion $f(x)$ ist einer *reduzierten* Funktion, d. h. einer Funktion kongruent, deren Grad $< n$ ist. Aus zwei Kongruenzen

$$g_1(x) \equiv g_2(x), \quad h_1(x) \equiv h_2(x) \mod \varphi(x)$$

ergeben sich die Kongruenzen

$$g_1(x) + h_1(x) \equiv g_2(x) + h_2(x), \; g_1(x) \cdot h_1(x) \equiv g_2(x) \cdot h_2(x) \mod \varphi(x).$$

Faßt man daher kongruente Funktionen zu einer *Restklasse* zusammen, so werden durch zwei solche Klassen A, B zwei weitere C, D in der Weise eindeutig bestimmt, daß wenn $g(x)$ irgendein Element aus

*) Über die Ausdehnung dieser Sätze auf Funktionen von mehreren Veränderlichen s. *Weber*, Math. Ann. 43, S. 521 ff., § 3.

A, $h(x)$ ein solches aus B ist, allemal $g(x)+h(x)$ zu C, $g(x)\cdot h(x)$ zu D gehört. Setzen wir also

$$A+B=C, \quad A\cdot B=D,$$

so bilden die Restklassen ein System mit doppelter Komposition, und aus dem Umstande, daß der Integritätsbereich $\mathfrak{R}[x]$ die Bedingungen 1. bis 6. des § 1 erfüllt, ist dasselbe leicht für das Restklassensystem zu erschließen. Die *Nullklasse*, die durch 0 bezeichnet werden möge, umfaßt hierbei die durch $\varphi(x)$ teilbaren Funktionen. Ist $\varphi(x)$ reduzibel, stellt

$$g(x)\cdot h(x)=\varphi(x) \tag{2.}$$

eine Zerlegung dar und bezeichnen A und B die Restklassen, zu welchen $g(x)$ bzw. $h(x)$ gehören, so hat man zufolge (2.)

$$A\neq 0, \quad B\neq 0, \quad A\cdot B=0.$$

Nehmen wir dagegen an, daß $\varphi(x)$ irreduzibel ist, so ist das Produkt zweier Funktionen nur dann durch $\varphi(x)$ teilbar, wenn wenigstens ein Faktor durch $\varphi(x)$ teilbar ist, und es ist also das Produkt zweier Restklassen nur dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich 0 ist. Hieraus ergibt sich weiter, daß aus $A\neq 0$, $AB=AC$ stets $B=C$ folgt. Sind endlich A und B zwei Restklassen, ist $A\neq 0$ und bezeichnen $f(x), g(x)$ Funktionen aus A bzw. B, so ist $f(x)$ zu $\varphi(x)$ teilerfremd; man kann also zwei Elemente $\psi(x), \chi(x)$ in $\mathfrak{R}[x]$ so bestimmen, daß

$$f(x)\cdot\psi(x)+\varphi(x)\cdot\chi(x)=\varepsilon,$$

also

$$f(x)\cdot(\psi(x)\cdot g(x))\equiv g(x) \quad \text{mod. } \varphi(x) \tag{3.}$$

wird. Bezeichnet C die Restklasse, welcher die Funktion $\psi(x)\cdot g(x)$ angehört, so ist zufolge (3.)

$$A\cdot C=B,$$

und somit erfüllt das Restklassensystem auch die Bedingung 7. des § 1. Wir erhalten also den Satz:

1. *Das zu der ganzen Funktion $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{K}$ gehörige Restklassensystem stellt dann einen Körper dar, wenn $\varphi(x)$ in $\mathfrak{K}$ irreduzibel ist.*

Es sei nun $\mathfrak{K}(j)$ ein Körper, der aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines algebraischen Elementes j hervorgeht. Dann sind die Potenzen

$$\varepsilon, j, j^2, \ldots \text{ in inf.}$$

linear abhängig, und wenn n die kleinste Zahl ist, für welche

$$\varepsilon, j, j^2, \ldots, j^n$$

linear abhängig sind, so besteht zwischen diesen Potenzen eine lineare homogene Relation mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, deren letzter von 0 verschieden ist, also, da man durch ihn dividieren kann, gleich ε angenommen werden darf. Die so erhaltene Relation

$$a_0 + a_1 j + a_2 j^2 + \cdots + a_{n-1} j^{n-1} + j^n = 0 \tag{4.}$$

ist eindeutig bestimmt. Denn hätte man eine zweite solche, so erhielte man durch Subtraktion eine lineare homogene Relation zwischen den Elementen $\varepsilon, j, \ldots, j^{n-1}$, die doch linear unabhängig sein sollen. Wir betrachten nun den in $\mathfrak{K}(j)$ enthaltenen Integritätsbereich $\mathfrak{K}[j]$ (der sich nachträglich als mit $\mathfrak{K}(j)$ identisch erweist) und vergleichen ihn mit einem Integritätsbereich $\mathfrak{K}[x]$, der aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines transzendenten Elementes x hervorgeht. $\mathfrak{K}[x]$ enthält die Funktion

$$\varphi(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

welche zufolge (4.) die Nullstelle j hat. Sind $g(x)$, $h(x)$ Elemente aus $\mathfrak{K}[x]$ und sind ihre Grade $< n$, so ist, weil $\varepsilon, j, \ldots, j^{n-1}$ linear unabhängig sind, $g(j) \neq 0$, $h(j) \neq 0$, und es folgt

$$\varphi(j) = 0 \neq g(j) \cdot h(j)$$

und hieraus

$$\varphi(x) \neq g(x) \cdot h(x),$$

d. h. $\varphi(x)$ ist nicht das Produkt zweier Funktionen kleineren Grades in $\mathfrak{K}$, also in $\mathfrak{K}$ irreduzibel. Nach den angegebenen Sätzen über irreduzible Funktionen ist $\varphi(x)$ die einzige irreduzible Funktion aus $\mathfrak{K}$ mit j als Nullstelle, von einem Faktor aus $\mathfrak{K}$ abgesehen, der aber hier durch die weitere

Forderung, daß der Koeffizient der höchsten Potenz gleich ε sein soll, auch fortfällt. Wir nennen den Grad n von $\varphi(x)$ auch *Grad des Elementes* j *in bezug auf* $\Re$, in Zeichen:

$$n = [j : \Re].$$

Wir ordnen nun jedem Element $f(x)$ aus $\Re[x]$ das Element $f(j)$ aus $\Re[j]$ zu. Ist $f(x)$ vom Grade 0, also Element von $\Re$, so wird $f(j) = f(x)$; die Elemente von $\Re[j]$, welche den Elementen von $\Re[x]$ entsprechen, umfassen alle Elemente von der Form

$$c_0 + c_1 j + \cdots + c_k j^k$$

mit beliebigen Koeffizienten c aus $\Re$, erschöpfen also den Integritätsbereich $\Re[j]$. Es entsprechen aber jedem Element von $\Re[j]$ unendlich viele Elemente von $\Re[x]$. Sind nämlich $f_1(x)$, $f_2(x)$ irgend zwei Elemente aus $\Re[x]$, so kann man

$$(5.) \qquad f_1(x) - f_2(x) = q(x) \cdot \varphi(x) + r(x)$$

setzen, wo $q(x)$, $r(x)$ Elemente aus $\Re[x]$ sind und der Grad von $r(x)$ $< n$ ist. Hieraus folgt aber

$$f_1(j) = f_2(j) + r(j),$$

und da $r(j)$ nur dann gleich 0 sein kann, wenn $r(x) = 0$ ist, wenn also nach (5.) $f_1(x) \equiv f_2(x)$ mod. $\varphi(x)$ ist, so entsprechen einem Element aus $\Re[j]$ die Elemente einer bestimmten Restklasse mod. $\varphi(x)$, und wir haben also eine ein-eindeutige Beziehung zwischen diesen Restklassen und $\Re[j]$. Da ferner aus

$$f(x) + g(x) = h(x),\ f(x) \cdot g(x) = k(x)$$

stets

$$f(j) + g(j) = h(j),\ f(j) \cdot g(j) = k(j)$$

folgt, so ist die Beziehung isomorph. Da $\varphi(x)$ irreduzibel ist, so ergibt sich, daß das Restklassensystem ein Körper ist, es muß also auch das isomorphe System $\Re[j]$ ein Körper sein; mithin wird $\Re[j] = \Re(j)$. Da jede Restklasse genau *eine* Funktion enthält, deren Grad $< n$ ist, so wird in der Form

(6.) $$c_0 + c_1 j + \cdots + c_{n-1} j^{n-1},$$

wenn für die Koeffizienten c beliebige Elemente aus $\mathfrak{k}$ genommen werden, jedes Element aus $\mathfrak{k}(j)$ genau einmal dargestellt.

Ist $\mathfrak{k}(\bar{j})$ eine zweite Erweiterung von $\mathfrak{k}$, und ist $\bar{j}$ Nullstelle derselben irreduziblen Funktion $\varphi(x)$, so haben wir, wie zwischen $\mathfrak{k}(j)$ und dem Restklassensystem mod. $\varphi(x)$, so zwischen diesem System und $\mathfrak{k}(\bar{j})$ eine isomorphe Beziehung. Aus diesen resultiert ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{k}(j)$ und $\mathfrak{k}(\bar{j})$, bei welchem nach dem Vorangehenden jedes Element von $\mathfrak{k}$ sich selbst entspricht. Beide Erweiterungen sind also äquivalent. — Andererseits ist leicht zu sehen, daß zu jeder irreduziblen Funktion $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{k}$ wirklich eine Erweiterung $\mathfrak{k}(j)$ gehört, bei welcher j eine Nullstelle von $\varphi(x)$ ist. Bezeichnet nämlich $\bar{\mathfrak{L}}$ den zu $\varphi(x)$ gehörigen Restklassenkörper, so besteht eine isomorphe Beziehung π_0 zwischen $\mathfrak{k}$ und einem Teilkörper $\bar{\mathfrak{k}}$ von $\bar{\mathfrak{L}}$, durch welche jedem Element a von $\mathfrak{k}$ die durch a repräsentierte Restklasse zugeordnet wird. Wir führen nun ein System $\mathfrak{S}$ von neuen Elementen ein, die wir den nicht zu $\bar{\mathfrak{k}}$ gehörigen Elementen von $\bar{\mathfrak{L}}$ eindeutig zuordnen. Diese Zuordnung und π_0 ergeben eine Abbildung π_1 zwischen $\bar{\mathfrak{L}}$ und dem System $\mathfrak{L} = \mathfrak{k} + \mathfrak{S}$. Sind A, B, C, D Elemente aus $\bar{\mathfrak{L}}$, a, b, c, d die entsprechenden aus $\mathfrak{L}$ und ist $A + B = C$, $A \cdot B = D$, so wird, falls a und b zu $\mathfrak{k}$ gehören, $a + b = c$, $a \cdot b = d$. Verfügen wir, daß auch andernfalls diese Gleichungen bestehen sollen, so wird $\mathfrak{L}$ ein zu $\bar{\mathfrak{L}}$ isomorpher Körper, der eine Erweiterung von $\mathfrak{k}$ darstellt. Ist j dasjenige Element von $\mathfrak{L}$, welches in dem Isomorphismus π_1 der durch x repräsentierten Restklasse entspricht, so ergibt sich aus der Definition der Addition und Multiplikation von Restklassen sofort: *Ein Element $g(x)$ aus $\mathfrak{k}[x]$ repräsentiert eine Restklasse, welcher durch π_1 das Element $g(j)$ aus $\mathfrak{L}$ zugeordnet wird.* Daraus folgt aber, daß $\varphi(j) = 0$ und daß durch die Elemente von der Form $g(j)$ der Körper $\mathfrak{L}$ erschöpft, mithin $\mathfrak{L} = \mathfrak{k}(j)$ wird. Also:

2. *Durch jede irreduzible Funktion $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{k}$ wird eine und — abgesehen von äquivalenten Erweiterungen — nur eine Erweiterung $\mathfrak{k}(j)$ bestimmt, in welcher j Nullstelle von $\varphi(x)$ ist.*

Ist $\varphi(x)$ vom Grade n und sind $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ irgend welche $n+1$ Elemente aus $\mathfrak{k}(j)$, so können wir diese in der Form

$$\gamma_i = c_{i0} + c_{i1} j + \cdots + c_{i,n-1} j^{n-1} \qquad (i = 0, \ldots n)$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ darstellen. Aus dem in § 1 erwähnten Satz über lineare Gleichungen folgt, daß wir in $\mathfrak{K}$ $n+1$ Elemente $b_0, \ldots, b_n$, die nicht alle 0 sind, so bestimmen können, daß $\sum_{i=0}^{n} b_i \gamma_i = 0$ wird. $n+1$ Elemente sind also stets linear abhängig. Da dies auch für die Potenzen $\varepsilon, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^n$ eines beliebigen Elementes von $\mathfrak{K}(j)$ gilt, so haben wir den Satz:

3. *Geht der Körper $\mathfrak{L}$ aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines algebraischen Elementes j hervor, so sind alle Elemente von $\mathfrak{L}$ algebraisch. Ist n der Grad von j, so ist jedes System von mehr als n Elementen linear abhängig.*

§ 7.

Grundlagen der algebraischen Erweiterungen.

Algebraische Erweiterungen; algebraisch abgeschlossene Körper. — Nachdem in §§ 5 und 6 die einfachsten Erweiterungen, die primitiven, untersucht worden sind und zu einer Unterscheidung (relativ) algebraischer und transzendenter Elemente geführt haben, sollen nun zuerst die *algebraischen* Erweiterungen näher betrachtet werden. Ein Körper $\mathfrak{L}$ heißt *algebraisch in bezug auf einen Teilkörper* $\mathfrak{K}$ oder eine *algebraische Erweiterung von* $\mathfrak{K}$, wenn jedes Element von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch ist. Jeder Körper $\mathfrak{L}$ enthält Elemente, die in bezug auf einen gegebenen Teilkörper $\mathfrak{K}$ algebraisch sind. Denn es ist klar, daß jedes Element von $\mathfrak{K}$ selbst in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch und zwar vom Grade 1 ist. Ebenso sieht man sofort, daß ein nicht zu $\mathfrak{K}$ gehöriges Element von $\mathfrak{L}$, falls es in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch ist, einen Grad >1 hat, also Nullstelle einer in $\mathfrak{K}$ irreduziblen Funktion von höherem als erstem Grade ist. Soll also eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ existieren, und zwar eine wirkliche d. h. von $\mathfrak{K}$ verschiedene, so ist dazu notwendig, aber nach § 6, 2. auch hinreichend, daß es in $\mathfrak{K}$ irreduzible Funktionen gibt, deren Grad >1 ist. Sind solche nicht vorhanden, zerfällt also jede ganze Funktion höheren Grades in Linearfaktoren, so ist der Körper $\mathfrak{K}$ keiner algebraischen Erweiterung mehr fähig und soll deshalb *algebraisch abgeschlossen* heißen. Die Existenz solcher Körper wurde zuerst durch den Fundamentalsatz der Algebra erwiesen, welcher aussagt, daß der Körper der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen ist.

Absolut algebraische Elemente und Körper. — Wenn ein Element α eines Körpers $\mathfrak{K}$ in bezug auf einen Teilkörper $\mathfrak{K}_1$ algebraisch ist, so ist es natürlich auch in bezug auf jeden Körper zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}$ algebraisch. Ist daher α in bezug auf den in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Primkörper algebraisch, so ist α in bezug auf jeden Teilkörper algebraisch. Ein solches Element α soll deshalb *absolut algebraisch* genannt werden. Ebenso nennen wir einen Körper *absolut algebraisch*, wenn er schon in bezug auf seinen Primkörper algebraisch ist oder, was dasselbe besagt, wenn alle seine Elemente absolut algebraisch sind.

Endliche Erweiterungen. — Ist $\mathfrak{K}$ Teilkörper von $\mathfrak{L}$, so sagen wir: $\mathfrak{L}$ ist *in bezug auf* $\mathfrak{K}$ *endlich und vom Grade* n — in Zeichen

$$[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}]=n$$

—, wenn man in $\mathfrak{L}$ n in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear unabhängige Elemente angeben kann, während jedes System von mehr als n Elementen aus $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear abhängig ist.

1. *Jede endliche Erweiterung eines Körpers ist algebraisch.*

Denn, wenn $[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}]=n$ und α ein Element von $\mathfrak{L}$ ist, so sind die Elemente $\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^n$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear abhängig, d. h. α ist in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch. Es gibt aber auch *unendliche* (nicht-endliche) algebraische Erweiterungen, z. B. die Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen zum Körper aller algebraischen Zahlen. — Man sieht sofort, daß jeder Körper $\mathfrak{K}$ in bezug auf sich selbst endlich, und zwar vom Grade 1 ist, während jede wirkliche endliche Erweiterung einen Grad >1 hat.

Basis einer endlichen Erweiterung. — Ist der Körper $\mathfrak{L}$ in bezug auf seinen Teilkörper $\mathfrak{K}$ endlich, $[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}]=n$, sind die Elemente $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ aus $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear unabhängig und ist β irgendein Element aus $\mathfrak{L}$, so besteht zwischen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ und β eine lineare homogene Relation mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, der man, weil der Koeffizient von β ungleich 0 ist, die Form

$$\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \tag{1.}$$

geben kann. Diese Darstellung ist nur auf eine Weise möglich, weil aus zwei Gleichungen für β von dieser Form durch Subtraktion eine lineare homogene Relation zwischen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ folgen würde. — Nehmen wir jetzt andererseits an, daß $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ Elemente irgendeines Erweiterungskörpers

$\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ sind. Weiß man dann, daß jedes Element β von $\mathfrak{L}$ sich *höchstens* auf eine Weise in der Form (1.) darstellen läßt, so gilt dies auch für $\beta = 0$, und der Ausdruck $c_1 \alpha_1 + \cdots + c_n \alpha_n$ ist also nur dann gleich 0, wenn alle Koeffizienten 0 sind. Daher ist die Erweiterung $\mathfrak{L}$, wenn überhaupt endlich, *wenigstens* vom Grade n. Weiß man hingegen, daß jedes Element β von $\mathfrak{L}$ sich *wenigstens* auf eine Weise in der Form (1.) darstellen läßt, so erhält man für irgendwelche $n+1$ Elemente β_0, $\beta_1, \ldots \beta_n$ Darstellungen von der Form

$$\beta_i = c_{i1} \alpha_1 + \cdots + c_{in} \alpha_n \qquad (i = 0, \ldots n)$$

und kann daher nach dem in § 1 angeführten Satz über lineare homogene Gleichungen $n+1$ Elemente $d_0, \ldots d_n$, die nicht alle 0 sind, in $\mathfrak{K}$ so bestimmen, daß $d_0 \beta_0 + \cdots + d_n \beta_n = 0$ wird. Die Erweiterung $\mathfrak{L}$ ist also endlich und *höchstens* vom Grade n. — Soll demnach die Darstellung (1.) für alle Elemente von $\mathfrak{L}$ und für jedes nur auf eine Weise möglich sein, so muß $[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}] = n$ und das System $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ linear unabhängig sein. Aus diesem Grunde wird ein System von n linear unabhängigen Elementen eines Erweiterungskörpers n-ten Grades auch als *Basis* dieses Körpers (in bezug auf den Grundkörper) bezeichnet. — Bilden die Elemente $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ eine Basis für den Erweiterungskörper $\mathfrak{L}$ und sind $\beta_1, \ldots \beta_n$ irgendwelche Elemente aus $\mathfrak{L}$, deren Darstellung in der Form (1.)

$$\beta_i = c_{i1} \alpha_1 + \cdots + c_{in} \alpha_n \qquad (i = 1, \ldots n)$$

sein möge, so zeigt man in bekannter Weise, daß die Elemente $\beta_1, \ldots \beta_n$ dann und nur dann eine Basis für $\mathfrak{L}$ bilden, wenn die Determinante $|c_{ik}|$ von Null verschieden ist.

Im Anschluß hieran leiten wir einige einfache Sätze über endliche Erweiterungen ab:

2. *Ist $\mathfrak{L}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ eine solche von $\mathfrak{L}$, so ist $\mathfrak{M}$ dann und nur dann in bezug auf $\mathfrak{K}$ endlich, wenn $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}$ endlich ist; und es ist in diesem Falle*

$$[\mathfrak{M}:\mathfrak{K}] = [\mathfrak{L}:\mathfrak{K}] \cdot [\mathfrak{M}:\mathfrak{L}].$$

Ist nämlich $[\mathfrak{M}:\mathfrak{K}] = \nu$, so besteht zwischen $\nu+1$ Elementen aus $\mathfrak{M}$ eine lineare homogene Relation mit Koeffizienten, die $\mathfrak{K}$, also auch $\mathfrak{L}$ an-

gehören. Es ist also $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}$ endlich. Ebenso besteht zwischen $\nu+1$ Elementen aus $\mathfrak{L}$, da diese zu $\mathfrak{M}$ gehören, eine lineare homogene Relation mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, d. h. $\mathfrak{L}$ ist endlich in bezug auf $\mathfrak{K}$. Setzen wir andererseits voraus, daß

$$[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}]=m, \quad [\mathfrak{M}:\mathfrak{L}]=n$$

ist, und wählen wir eine Basis $\alpha_1, \dots \alpha_m$ von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ und eine Basis $\beta_1, \dots \beta_n$ von $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}$. Dann sind die $m \cdot n$ Elemente $\alpha_i \cdot \beta_k$ $(i=1, \dots m;\ k=1, \dots n)$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear unabhängig. Denn aus einer Relation $\sum_{i,k} c_{ik}\alpha_i\beta_k=0$, in welcher die Koeffizienten c_{ik} dem Körper $\mathfrak{K}$ angehören folgt, wenn

$$(2.) \qquad \sum_{i=1}^{m} c_{ik}\alpha_i=\gamma_k \qquad (k=1, \dots n)$$

gesetzt wird, $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k\beta_k=0$. Da die Koeffizienten γ_k zu $\mathfrak{L}$ gehören und die Elemente β_k eine Basis von $\mathfrak{M}$ bilden, so muß $\gamma_1=0, \dots \gamma_n=0$ sein. Dann aber folgt aus (2.), daß alle $m \cdot n$ Koeffizienten c_{ik} gleich 0 sein müssen, womit die lineare Unabhängigkeit der Elemente $\alpha_i\beta_k$ erwiesen ist. Ist ferner τ irgendein Element aus $\mathfrak{M}$, so erhält man

$$\tau=\sigma_1\beta_1+\cdots+\sigma_n\beta_n,$$

wo die Koeffizienten σ_k zu $\mathfrak{L}$ gehören,

$$\sigma_k=a_{1k}\alpha_1+\cdots+a_{mk}\alpha_m,$$

wo die Koeffizienten a_{ik} Elemente aus $\mathfrak{K}$ sind, und hieraus

$$\tau=\sum_{i,k} a_{ik}\alpha_i\beta_k,$$

d. h. jedes Element von $\mathfrak{M}$ ist durch die $m \cdot n$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear unabhängigen Elemente $\alpha_i\beta_k$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ linear und homogen ausdrückbar; es ist also

$$[\mathfrak{M}:\mathfrak{K}]=m \cdot n.$$

3. *Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ endliche Erweiterungen gleichen Grades von $\mathfrak{K}$ und ist $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{M}$ enthalten, so ist $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{M}$ identisch.*

Denn nach 2. ist $[\mathfrak{M}:\mathfrak{L}]=1$, also $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}$.

4. *Ist* $\mathfrak{K}(j)$ *eine einfache algebraische Erweiterung von* $\mathfrak{K}$, *so ist*

$$[\mathfrak{K}(j):\mathfrak{K}]=[j:\mathfrak{K}].$$

Denn, wenn $[j:\mathfrak{K}]=n$ ist, so ist, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, jedes Element von $\mathfrak{K}(j)$ auf eine und nur eine Weise in der Form

$$c_0+c_1 j+\cdots+c_{n-1} j^{n-1}$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ darstellbar; die Elemente $\varepsilon, j, \ldots j^{n-1}$ bilden also eine Basis von $\mathfrak{K}(j)$ in bezug auf $\mathfrak{K}$.

5. *Ist der Körper* $\mathfrak{L}$ *in bezug auf seinen Teilkörper* $\mathfrak{K}$ *endlich und vom Grade* n, *so ist der Grad jedes Elementes von* $\mathfrak{L}$ *(in bezug auf* $\mathfrak{K}$*) ein Teiler von* n, *die Erweiterung* $\mathfrak{L}$ *ist dann und nur dann einfach, wenn Elemente vom Grade* n *vorkommen; und zwar sind dann diese Elemente primitiv, alle andern imprimitiv.*

Ist nämlich j irgendein Element von $\mathfrak{L}$, so ist nach 2. und 4.

$$n=[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}]=[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}(j)]\cdot[j:\mathfrak{K}],$$

also $[j:\mathfrak{K}]$ Teiler von n. Soll ferner j primitives Element von $\mathfrak{L}$, d. h. $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}(j)$ sein, so ist notwendig und hinreichend, daß $[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}(j)]=1$, also $[j:\mathfrak{K}]=n$ wird.

6. *Eine Erweiterung ist dann und nur dann endlich, wenn sie durch Adjunktion einer endlichen Anzahl (relativ) algebraischer Elemente erhalten werden kann.*

Ist nämlich $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}_0(j_1, j_2, \ldots j_\nu)$, wo die Elemente $j_1, j_2, \ldots j_\nu$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ algebraisch sind, und setzt man

$$\mathfrak{K}_0(j_1)=\mathfrak{K}_1,\quad \mathfrak{K}_1(j_2)=\mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_{\nu-1}(j_\nu)=\mathfrak{K}_\nu=\mathfrak{L},$$

so ist jedes Element j_k algebraisch in bezug auf den zwischen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{L}$ gelegenen Körper $\mathfrak{K}_{k-1}$, daher $\mathfrak{K}_k$ eine einfache algebraische und somit endliche Erweiterung von $\mathfrak{K}_{k-1}$. Mithin ist nach 2. auch $\mathfrak{K}_\nu=\mathfrak{L}$ eine endliche Erweiterung von $\mathfrak{K}_0$. — Wird umgekehrt $\mathfrak{L}$ als endliche Erweiterung von $\mathfrak{K}_0$ vorausgesetzt: $[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}_0]=n$, und bezeichnet j_1 ein nicht zu $\mathfrak{K}_0$ gehöriges Element von $\mathfrak{L}$, ferner, falls $\mathfrak{K}_1=\mathfrak{K}_0(j_1)$ noch nicht gleich $\mathfrak{L}$ ist, j_2 ein nicht

zu $\mathfrak{K}_1$ gehöriges Element von $\mathfrak{L}$, falls $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(j_1)$ noch nicht gleich $\mathfrak{L}$ ist, j_3 ein nicht zu $\mathfrak{K}_2$ gehöriges Element von $\mathfrak{L}$ usf., so bilden die Grade $[\mathfrak{K}_1 : \mathfrak{K}_0]$, $[\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_0], \ldots$ eine beständig zunehmende, n nicht überschreitende Folge, welche so lange fortgesetzt werden kann, als die Zahl n noch nicht erreicht ist. Daher wird nach einer endlichen Anzahl ν von Schritten die Zahl n erreicht, und es ist alsdann $\mathfrak{K}_0(j_1, j_2, \ldots j_\nu) = \mathfrak{K}^\nu = \mathfrak{L}$.

An diese Sätze schließen sich einige weitere, die sich auf beliebige algebraische Erweiterungen beziehen:

7. *Wird der Körper $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ aus seinem Teilkörper $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines Systems $\mathfrak{S}$ erhalten, dessen sämtliche Elemente in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch sind, so ist $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch.*

Ist nämlich $\mathfrak{S}$ ein endliches System, so ist nach 6. $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ endlich, also algebraisch. Ist aber $\mathfrak{S}$ unendlich, so ist doch (§ 2, 3.) jedes Element α von $\mathfrak{L}$ in einem Körper enthalten, der aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines endlichen Teilsystems von $\mathfrak{S}$ hervorgeht, daher, wie im vorigen Falle, algebraisch in bezug auf $\mathfrak{K}$.

8. *Diejenigen Elemente eines Körpers $\mathfrak{L}$, welche in bezug auf einen Teilkörper $\mathfrak{K}$ algebraisch sind, bilden einen Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$; insbesondere bilden also die absolut algebraischen Elemente von $\mathfrak{L}$ einen Körper.*

Ist nämlich $\mathfrak{S}$ das System aller in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraischer Elemente von $\mathfrak{L}$, so enthält der zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ gelegene Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ nur Elemente, die in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch sind (Satz 7.), woraus $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ folgt.

9. *Liegt der Körper $\mathfrak{L}$ zwischen den Körpern $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ und ist $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}$ algebraisch, so ist $\mathfrak{M}$ algebraisch in bezug auf $\mathfrak{K}$.*

Es sei nämlich β ein beliebiges Element von $\mathfrak{M}$. Ist dann $[\beta : \mathfrak{L}] = n$, so hat man eine Gleichung

$$\alpha_0 + \alpha_1 \beta + \cdots + \alpha_{n-1} \beta^{n-1} + \beta^n = 0, \tag{3.}$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ Elemente von $\mathfrak{L}$ sind. Diese Elemente sind in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch, also ist der Körper $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1})$ nach 6. endlich in bezug auf $\mathfrak{K}$. Ferner ist nach Gleichung (3.) das Element β in bezug auf $\mathfrak{K}'$ algebraisch, also $\mathfrak{K}'(\beta)$ endlich in bezug auf $\mathfrak{K}'$. Mithin ist nach 2. $\mathfrak{K}'(\beta)$ endlich in bezug auf $\mathfrak{K}$, also β algebraisch in bezug auf $\mathfrak{K}$, womit Satz 9. bewiesen ist.

§ 8.

Zerlegung einer beliebigen ganzen Funktion in Linearfaktoren. Normalkörper und Normalfunktionen.

In § 6 wurde gezeigt, daß jede in einem Körper irreduzible ganze Funktion in einem geeigneten Erweiterungskörper eine Nullstelle besitzt. Im Anschluß daran kann nun die weitergehende Aufgabe behandelt werden, *einen Körper so zu erweitern, daß eine beliebig gegebene Funktion aus dem ursprünglichen Körper im Erweiterungskörper vollständig, d. h. in Linearfaktoren zerfällt.*

Es sei also jetzt $f(x)$ eine beliebige ganze Funktion in einem Körper $\Re_0$, n der Grad von $f(x)$, m_0 die Anzahl der in $\Re_0$ irreduziblen Faktoren von $f(x)$. Dann ist $m_0 \leqq n$ und nur dann gleich n, wenn $f(x)$ in $\Re_0$ vollständig zerfällt. Nehmen wir an, es sei $m_0 < n$. Dann besitzt $f(x)$ einen irreduziblen Faktor $g_1(x)$, dessen Grad >1 ist. Wir erweitern $\Re_0$ durch Adjunktion eines Elementes j_1, für welches $g_1(j_1)=0$ wird (§ 6). Da in dem Körper $\Re_1=\Re_0(j_1)$ die Funktion $g_1(x)$ nicht mehr irreduzibel ist, so ist die Anzahl m_1 der in $\Re_1$ irreduziblen Faktoren von $f(x) > m_0$; wir haben also $m_0 < m_1 \leqq n$. Ist $m_1 < n$, so sei $g_2(x)$ ein irreduzibler, nicht linearer Faktor von $f(x)$ innerhalb $\Re_1$. Wir adjungieren eine Nullstelle j_2 von $g_2(x)$, setzen $\Re_1(j_2)=\Re_2$ und bezeichnen mit m_2 die Anzahl der irreduziblen Faktoren von $f(x)$ in $\Re_2$, so daß $m_0 < m_1 < m_2 \leqq n$ wird. In dieser Weise fahren wir fort, bis wir zu einem Körper $\Re_\nu$ gelangen, für welchen $m_\nu = n$ wird, in welchem also $f(x)$ in Linearfaktoren zerfällt. Der Körper $\Re_\nu$ stellt dann eine endliche Erweiterung von $\Re_0$ dar. — Es seien $j_1, \ldots j_\nu$ die nacheinander adjungierten Elemente, $\Re_r=\Re_{r-1}(j_r)$ $(r=1, \ldots \nu)$ die nacheinander entstehenden Körper, und es sei $g_r(x)$ der in $\Re_{r-1}$ irreduzible Faktor von $f(x)$ mit der Nullstelle j_r. Wir können sagen, daß die Erweiterung $\Re_\nu$ zur vollständigen Zerfällung von $f(x)$ *gerade hinreicht.* Das soll heißen: daß nicht schon ein von $\Re_\nu$ verschiedener Körper zwischen $\Re_0$ und $\Re_\nu$ hierfür ausreicht, und dies geht daraus hervor, daß die adjungierten Elemente $j_1, \ldots j_\nu$ sämtlich Nullstellen von $f(x)$ sind, also in jedem Teilkörper von $\Re_\nu$, der die Zerlegung leistet, vorkommen müssen.

Es sei jetzt $\bar{\Re}_0$ ein zu $\Re_0$ isomorpher Körper, und es bezeichne π_0 eine isomorphe Beziehung zwischen $\Re_0$ und $\bar{\Re}_0$. Durch π_0 wird dann auch

jeder ganzen Funktion $g(x)$ aus $\mathfrak{K}_0$ eine bestimmte Funktion $\overline{g}(x)$ aus $\overline{\mathfrak{K}}_0$ zugewiesen, die man erhält, wenn man die Koeffizienten von $g(x)$ durch die ihnen in $\overline{\mathfrak{K}}_0$ entsprechenden Elemente ersetzt. Die so erhaltene Beziehung zwischen $\mathfrak{K}_0[x]$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0[x]$ ist dann offenbar auch isomorph. Sind daher $\overline{f}(x)$ und $\overline{g}_1(x)$ die den oben vorkommenden Funktionen $f(x)$ und $g_1(x)$ zugeordneten Funktionen aus $\overline{\mathfrak{K}}_0$, so zerfällt $\overline{f}(x)$ in $\overline{\mathfrak{K}}_0$ in m_0 irreduzible Faktoren, und $\overline{g}_1(x)$ ist einer von ihnen. Es sei nun $\mathfrak{L}$ irgendein Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}_0$, innerhalb dessen $\overline{f}(x)$ vollständig zerfällt. Dann ist die Erweiterung $\mathfrak{L}$ zur vollständigen Zerfällung von $\overline{f}(x)$ entweder gerade hinreichend oder nicht; in jedem Falle hat ein bestimmter Körper $\mathfrak{M}$ zwischen $\overline{\mathfrak{K}}_0$ und $\mathfrak{L}$, derjenige nämlich, welchen man erhält, indem man die Nullstellen von $\overline{f}(x)$ innerhalb $\mathfrak{L}$ zu $\overline{\mathfrak{K}}_0$ adjungiert, diese Eigenschaft. Da $\overline{f}(x)$ in $\mathfrak{M}$ vollständig zerfällt, so besitzt der Faktor $\overline{g}_1(x)$ von $\overline{f}(x)$ in $\mathfrak{M}$ Nullstellen. Es sei $\overline{\jmath}_1$ eine solche, und es bezeichne r den Grad von $g_1(x)$ und $\overline{g}_1(x)$. Durch die isomorphe Beziehung, welche zwischen $\mathfrak{K}_0[x]$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0[x]$ besteht, werden die Funktionen $g_1(x)$ und $\overline{g}_1(x)$ einander zugeordnet und daher die zu diesen Funktionen als Moduln gehörigen Restklassenkörper isomorph aufeinander bezogen. Diese Restklassenkörper aber stehen zu den Körpern $\mathfrak{K}_0(\jmath_1) = \mathfrak{K}_1$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0(\overline{\jmath}_1) = \overline{\mathfrak{K}}_1$ in isomorpher Beziehung, und es resultiert so eine isomorphe Beziehung π_1 zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\overline{\mathfrak{K}}_1$, durch welche jedem Element von $\mathfrak{K}_1$, das man sich in der Form

$$a_0 + a_1\jmath + \cdots + a_{r-1}\jmath^{r-1}$$

mit Koeffizienten a aus $\mathfrak{K}_0$ geschrieben denkt, dasjenige Element

$$\overline{a}_0 + \overline{a}_1\overline{\jmath} + \cdots + \overline{a}_{r-1}\overline{\jmath}^{r-1}$$

von $\overline{\mathfrak{K}}_1$ zugeordnet wird, welches man erhält, indem man a_k $(k = 0, \ldots, r-1)$ durch das in der Beziehung π_0 entsprechende Element $\overline{a}_k$ aus $\overline{\mathfrak{K}}_0$ ersetzt. Die Beziehung π_0 ist in der Beziehung π_1 enthalten, indem π_1 die Elemente der Körper $\mathfrak{K}_0$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0$ in derselben Weise einander zuordnet wie π_0. Nach alledem können wir sagen: Zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\overline{\mathfrak{K}}_1$ besteht ein Isomorphismus π_1, durch welchen der Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{K}_1$ die Funktion $\overline{f}(x)$ aus $\overline{\mathfrak{K}}_1$ zugewiesen wird; der Körper $\mathfrak{M}$ stellt eine Erweiterung von $\overline{\mathfrak{K}}_1$ dar, welche zur vollständigen Zerfällung von $\overline{f}(x)$ gerade hinreicht. Wir

können daher auf $\mathfrak{K}_1, \bar{\mathfrak{K}}_1, \pi_1, f(x), \bar{f}(x)$ dieselbe Schlußweise anwenden wie soeben auf $\mathfrak{K}_0$, $\bar{\mathfrak{K}}_0, \pi_0, f(x), \bar{f}(x)$. Fahren wir in dieser Weise fort, so gelangen wir zu einer Reihe von Körpern

$$\bar{\mathfrak{K}}_0, \bar{\mathfrak{K}}_1, \ldots \bar{\mathfrak{K}}_\nu$$

mit folgenden Eigenschaften: Jeder vorhergehende Körper ist in dem folgenden, und alle sind in $\mathfrak{M}$ enthalten. Zwischen $\mathfrak{K}_r$ und $\bar{\mathfrak{K}}_r (r=0, \ldots \nu)$ besteht eine isomorphe Beziehung π_r welche die Beziehung π_0 umfaßt, also die Funktionen $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ einander zuordnet. Da nun $f(x)$ in $\mathfrak{K}_\nu$ in Linearfaktoren zerfällt, so gilt dasselbe für $\bar{f}(x)$ in $\bar{\mathfrak{K}}_\nu$; und da $\bar{\mathfrak{K}}_\nu$ zwischen $\bar{\mathfrak{K}}_0$ und $\mathfrak{M}$ liegt und $\mathfrak{M}$ eine zur vollständigen Zerfällung von $\bar{f}(x)$ gerade hinreichende Erweiterung von $\bar{\mathfrak{K}}_0$ sein sollte, so ist $\bar{\mathfrak{K}}_\nu = \mathfrak{M}$, und wir haben den Satz:

1. *Sind $\mathfrak{K}_0$ und $\bar{\mathfrak{K}}_0$ isomorphe Körper, bezeichnet π_0 eine isomorphe Beziehung zwischen ihnen, welche der ganzen Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{K}_0$ die ganze Funktion $\bar{f}(x)$ aus $\bar{\mathfrak{K}}_0$ zuweist, und sind $\mathfrak{N}$ und $\bar{\mathfrak{N}}$ Erweiterungen von $\mathfrak{K}_0$ bzw. $\bar{\mathfrak{K}}_0$, welche zur vollständigen Zerfällung von $f(x)$ bzw. $\bar{f}(x)$ gerade hinreichen, so gibt es eine isomorphe Beziehung π' zwischen $\mathfrak{N}$ und $\bar{\mathfrak{N}}$, welche die Beziehung π_0 mit umfaßt.*

Die Voraussetzungen des Satzes 1. sind erfüllt, wenn $\bar{\mathfrak{K}}_0 = \mathfrak{K}_0$ genommen und unter π_0 die Beziehung verstanden wird, welche jedes Element von $\mathfrak{K}_0$ sich selbst entsprechen läßt. Dann wird $\bar{f}(x) = f(x)$, und die Beziehung π' läßt ebenfalls jedes Element von $\mathfrak{K}_0$ ungeändert; d. h. $\mathfrak{N}$ und $\bar{\mathfrak{N}}$ sind äquivalente Erweiterungen. Somit haben wir folgendes Ergebnis:

2. *Zu jeder ganzen Funktion $f(x)$ eines Körpers $\mathfrak{K}_0$ gehört eine und im wesentlichen nur eine Erweiterung dieses Körpers, welche zur vollständigen Zerfällung von $f(x)$ gerade hinreicht.*

Hierauf beruht es, daß alle für uns in Betracht kommenden Sätze über Wurzeln von Gleichungen unabhängig sind von der Art, wie wir den Grundkörper erweitern, um die Gleichungen aufzulösen. Um dies noch etwas näher auszuführen, so sei

$$f(x) = (x - \omega_1)(x - \omega_2) \cdots (x - \omega_n)$$

die Zerlegung einer Funktion $f(x)$ eines Körpers $\mathfrak{K}_0$ in einem Erweiterungs-

körper Ω. Dann stellt der zwischen $\mathfrak{k}_0$ und Ω gelegene Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}_0(\omega_1, \ldots \omega_n)$ eine für diese Zerlegung gerade hinreichende Erweiterung dar. Hat man eine zweite Zerlegung von $f(x)$ in einem andern Erweiterungskörper Ω', und ist $\overline{\mathfrak{K}}$ der Körper, welcher durch Adjunktion der in Ω' auftretenden Nullstellen von $f(x)$ aus $\mathfrak{k}_0$ gewonnen wird, so hat man eine isomorphe Beziehung π' zwischen $\mathfrak{K}$ und $\overline{\mathfrak{K}}$, welche alle Elemente von $\mathfrak{k}_0$ ungeändert läßt, und die Zerlegung von $f(x)$ in Ω' wird

$$f(x) = (x - \overline{\omega}_1)(x - \overline{\omega}_2) \cdots (x - \overline{\omega}_n),$$

wo ω_i und $\overline{\omega}_i (i = 1, \ldots n)$ einander im Isomorphismus π' entsprechen. Haben wir also eine rationale Verbindung von $\omega_1, \ldots \omega_n$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{k}_0$, also ein Element von $\mathfrak{K}$, so erhalten wir das entsprechende Element aus $\overline{\mathfrak{K}}$, indem wir jedes ω_i durch $\overline{\omega}_i$ ersetzen. Insbesondere ergibt sich, daß wenn gewisse der Wurzeln ω_i gleich sind, auch die entsprechenden Wurzeln $\overline{\omega}_i$ gleich sein müssen. Wir können also von der *Anzahl der einfachen, doppelten, dreifachen, ... Wurzeln* einer Gleichung sprechen, ohne den Erweiterungskörper anzugeben. Die Bestimmung dieser Anzahlen wird später (§ 10.) durchgeführt werden.

Normale Erweiterungen. — Die Erweiterungen eines Körpers $\mathfrak{k}_0$, welche zur vollständigen Zerlegung einer Funktion $f(x)$ gerade ausreichen, gehören zu der besonderen Art der *normalen* Erweiterungen. Ein Erweiterungskörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{k}_0$ heißt *normal in bezug auf* $\mathfrak{k}_0$, wenn er in bezug auf $\mathfrak{k}_0$ algebraisch ist und wenn außerdem jede ganze Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{k}_0$, welche in $\mathfrak{k}_0$ irreduzibel ist, in $\mathfrak{K}$ aber eine Nullstelle besitzt, in $\mathfrak{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Offenbar ist jede zu einer normalen Erweiterung äquivalente Erweiterung ebenfalls normal. — Wir leiten einige einfache die Normalkörper betreffende Sätze ab:

3. *Ist der Körper $\mathfrak{K}$ normal in bezug auf seinen Teilkörper $\mathfrak{k}_0$, so ist er auch normal in bezug auf jeden Körper $\mathfrak{k}_1$ zwischen $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{K}$.*

Zunächst nämlich ist $\mathfrak{K}$ in bezug auf $\mathfrak{k}_1$ algebraisch. Ist nun $\varphi(x)$ eine irreduzible ganze Funktion aus $\mathfrak{k}_1$ und hat $\varphi(x)$ in $\mathfrak{K}$ eine Nullstelle j, so ist j auch Nullstelle einer irreduziblen Funktion $f(x)$ des Körpers $\mathfrak{k}_0$, und da $\mathfrak{K}$ in bezug auf $\mathfrak{k}_0$ normal ist, so zerfällt $f(x)$ in $\mathfrak{K}$ in Linearfaktoren. Da aber $f(x)$ auch Funktion im Körper $\mathfrak{k}_1$ ist und mit der irreduziblen Funktion $\varphi(x)$ dieses Körpers die Nullstelle j gemein hat,

so ist $\varphi(x)$ ein Faktor von $f(x)$; mithin zerfällt auch $\varphi(x)$ in $\Re$ in Linearfaktoren. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Normale Funktionen. — Eine ganze Funktion $f(x)$ eines Körpers $\Re_0$ soll *normal in* $\Re_0$ heißen, wenn sie in $\Re_0$ irreduzibel ist und außerdem die Erweiterung $\Re_0(j)$, welche durch Adjunktion einer Nullstelle j von $f(x)$ erhalten wird, normal ist. — Ist $f(x)$ in $\Re_0$ normal, so zerfällt $f(x)$ in dem durch Adjunktion einer Nullstelle j von $f(x)$ erhaltenen Körper $\Re(j)$ in Linearfaktoren. Dies geht unmittelbar aus der Definition der normalen Erweiterungen und Funktionen hervor. Es gilt aber auch umgekehrt:

4. *Wenn eine in einem Körper $\Re_0$ irreduzible Funktion $f(x)$ in dem durch Adjunktion einer Nullstelle j entstehenden Körper $\Re_0(j)$ vollständig zerfällt, so ist sie in bezug auf $\Re_0$ normal.*

Ist nämlich $g(x)$ eine irreduzible Funktion aus $\Re_0$, und besitzt $g(x)$ in $\Re_0(j)$ eine Nullstelle α, so können wir $\alpha=\varphi(j)$ setzen, wo $\varphi(x)$ eine ganze Funktion aus $\Re_0$ bezeichnet. Ist nun

$$f(x)=(x-j)\,(x-j_1)\cdots(x-j_{n-1})$$

die vorausgesetzte Zerlegung von $f(x)$ in $\Re_0(j)$, so schließt man in bekannter Weise, daß die Koeffizienten der Funktion

$$h(x)=(x-\varphi(j))\,(x-\varphi(j_1))\cdots(x-\varphi(j_{n-1}))$$

symmetrische Funktionen von $j, j_1, \ldots j_{n-1}$, also Elemente aus $\Re_0$ werden. $h(x)$ ist also eine Funktion in $\Re_0$, welche mit der in $\Re_0$ irreduziblen Funktion $g(x)$ den Faktor $x-\varphi(j)$ gemein hat, also durch $g(x)$ teilbar ist. Da $h(x)$ in $\Re_0(j)$ vollständig zerfällt, so gilt dasselbe für $g(x)$ d. h. für jede in $\Re_0$ irreduzible Funktion, welche in $\Re_0(j)$ eine Nullstelle besitzt. $\Re_0(j)$ ist also eine normale Erweiterung von $\Re_0$, mithin $f(x)$ normal in $\Re_0$.

5. *Ist $f(x)$ eine normale Funktion des Körpers $\Re_0$, Ω irgendeine Erweiterung von $\Re_0$, so ist jeder in Ω irreduzible Faktor von $f(x)$ in Ω normal.*

Ist nämlich $g(x)$ ein solcher Faktor und wird Ω durch Adjunktion einer Nullstelle j von $g(x)$ erweitert, so enthält $\Omega(j)$ den Körper $\Re_0(j)$, und es ist j Nullstelle von $f(x)$. Da die Funktion $f(x)$ in $\Re_0$ normal ist, so zerfällt sie in $\Re_0(j)$, also auch in $\Omega(j)$ in Linearfaktoren. Da im Körper Ω $g(x)$ ein Faktor von $f(x)$ ist, so zerfällt auch $g(x)$ in $\Omega(j)$ in Linearfaktoren, also ist $g(x)$ nach Satz 4. in Ω normal, w. z. b. w.

6. *Eine Erweiterung* $\mathfrak{R}$ *eines Körpers* $\mathfrak{k}_0$, *welche gerade ausreicht, eine Funktion* $f(x)$ *aus* $\mathfrak{k}_0$ *vollständig zu zerfällen, ist normal.*

Ist nämlich

$$f(x)=(x-j_1)(x-j_2)\cdots(x-j_n)$$

die Zerlegung von $f(x)$ in $\mathfrak{R}$, $g(x)$ eine irreduzible Funktion des Körpers $\mathfrak{k}_0$, welche in $\mathfrak{R}$ eine Nullstelle β hat, so läßt sich β in der Form

$$\beta=\psi(j_1, j_2, \dots j_n)$$

darstellen, wo $\psi(x_1, x_2, \dots x_n)$ eine ganze Funktion aus $\mathfrak{k}_0$ bezeichnet. Durch die $n!$ Vertauschungen der Elemente $j_1, j_2, \dots j_n$ gehen aus β $n!$ Elemente des Körpers $\mathfrak{R}$ hervor, die $\beta, \beta_1, \dots \beta_{n!-1}$ heißen mögen. Die Funktion

$$\varphi(x)=(x-\beta)(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_{n!-1})$$

ist im Körper $\mathfrak{k}_0$ enthalten, da ihre Koeffizienten symmetrische Funktionen von $j_1, j_2, \dots j_n$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{k}_0$ sind; sie hat mit der in $\mathfrak{k}_0$ irreduziblen Funktion $g(x)$ den Faktor $x-\beta$ gemein, ist also durch $g(x)$ teilbar. Da $\varphi(x)$ in $\mathfrak{R}$ vollständig zerfällt, so zerfällt auch $g(x)$ in $\mathfrak{R}$ vollständig. Damit sind aber die Bedingungen für die normale Erweiterung erfüllt.

In den Sätzen 1., 2., 6. dieses Paragraphen kann an die Stelle einer einzelnen Funktion $f(x)$ des Körpers $\mathfrak{k}_0$ natürlich auch ein System S, bestehend aus einer *endlichen* Anzahl von Funktionen dieses Körpers, gesetzt werden. Besteht nämlich das System S aus den Funktionen

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \dots\ \varphi_m(x)$$

und wird

$$f(x)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\cdots\varphi_m(x)$$

gesetzt, so ist klar, daß in einem Erweiterungskörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{k}_0$ die sämtlichen Funktionen des Systems S dann und nur dann vollständig zerfallen, wenn die Funktion $f(x)$ in $\mathfrak{L}$ vollständig zerfällt.

§ 9.

Differenzierung.

Zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen von bestimmter Vielfachheit ziehen wir die Ableitungen der Funktionen in Betracht. Die

Ableitung oder den *Differentialquotienten* $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$ einer ganzen Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

einer Unbestimmten x nach dieser Unbestimmten definieren wir rein formal als den Ausdruck

$$a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1},$$

so daß $f'(x)$ in jedem Körper $\Re$ als Funktion auftritt, in welchem $f(x)$ vorkommt. Aus dieser Definition ergibt sich, wenn

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

eine zweite Funktion aus $\Re$ ist, unmittelbar

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x).$$

Ferner wird

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{d}{dx} \Sigma a_q b_r x^{q+r} = \Sigma (q+r) a_q b_r x^{q+r-1}$$

$$= \Sigma a_q x^q \cdot r b_r x^{r-1} + \Sigma q a_q x^{q-1} b_r x^r = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x),$$

also

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Es sei jetzt $R(x)$ eine rationale Funktion von x. Wir können dieselbe auf verschiedene Weise als Quotienten ganzer Funktionen darstellen

$$R(x) = \frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1}.$$

Dann ist aber

(1.) $$u v_1 = v u_1.$$

Bildet man auf beiden Seiten die Ableitung, so erhält man

$$u v_1' + u' v_1 = v u_1' + v' u_1,$$

also

(2.) $$u' v_1 - v u_1' = v' u_1 - u v_1'.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit vv_1, so erhält man

$$v_1^2 vu' - v^2 v_1 u_1' = vv_1(v'u_1 - uv_1'). \tag{3.}$$

Multipliziert man Gleichung (1.) mit $vv_1' + v'v_1$, so erhält man

$$vv_1 uv_1' + v_1^2 uv' = vv_1 v'u_1 + v^2 u_1 v_1',$$

also

$$v_1^2 uv' - v^2 u_1 v_1' = vv_1(v'u_1 - uv_1'). \tag{4.}$$

Aus (3.) und (4.) folgt

$$(vu' - uv')v_1^2 = (v_1 u_1' - u_1 v_1')v^2,$$

also

$$\frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{v_1 u_1' - u_1 v_1'}{v_1^2}. \tag{5.}$$

Hiernach sind wir berechtigt, unter der Ableitung einer rationalen Funktion $R(x) = \frac{u}{v}$ den Ausdruck $\frac{vu' - uv'}{v^2}$ zu verstehen, weil diese Definition, wie Gleichung (5.) zeigt, von der speziellen Darstellung von $R(x)$ unabhängig ist, und weil sie im Falle, daß $R(x)$ gleich einer ganzen Funktion u ist (die man in der Form $\frac{u}{\varepsilon}$ schreiben kann), mit der früher gegebenen Definition übereinstimmt. Durch direkte Ausrechnung ergibt sich dann sofort, daß für irgend zwei rationale Funktionen u, v die Gesetze gelten:

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v', \tag{6.}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + u'v, \tag{7.}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \tag{8.}$$

Aus (7.) folgt weiter

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}u',$$

daraus, wenn $\lambda(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n$ eine ganze Funktion von u (im

Körper $\Re$) ist,

$$\frac{d}{dx}\lambda(u) = (a_1 + 2a_2 u + \cdots + n a_n u^{n-1})u' = \frac{d}{du}\lambda(u) \cdot \frac{du}{dx}.$$

Die Anwendung dieser Gleichung ergibt, wenn $\mu(x)$ ebenfalls eine ganze Funktion bezeichnet:

$$\frac{d}{dx}\frac{\lambda(u)}{\mu(u)} = \frac{\mu(u)\frac{d}{du}\lambda(u) - \lambda(u)\frac{d}{du}\mu(u)}{(\mu(u))^2}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\frac{\lambda(u)}{\mu(u)} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Mit andern Worten: Ist v eine rationale Funktion von u, u eine rationale Funktion von x, so ist

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Der Begriff Differentialquotient läßt sich auch noch weiter ausdehnen, doch soll hierauf nicht eingegangen werden.

§ 10.

Die Vielfachheit der Nullstellen einer ganzen Funktion.

Bei den bisher behandelten Fragen ist die Charakteristik des Körpers von keiner Bedeutung gewesen; in den folgenden Untersuchungen treffen wir aber auf wesentliche Unterschiede zwischen den Körpern von der Charakteristik 0 und denen von Primzahlcharakteristik. Dies zeigt sich zunächst bei der Frage, unter welchen Umständen die Ableitung einer rationalen Funktion verschwindet.

Es liege ein Körper $\Re$ vor, und es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

eine ganze Funktion der Unbestimmten x in $\Re$. Dann ist

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1},$$

so daß für den Fall der Charakteristik 0 $f'(x)$ nur dann verschwindet, wenn $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots a_n = 0$ ist, $f(x)$ also x nicht enthält. Ist aber die Charakteristik von $\Re$ eine Primzahl p, so ist der in $f'(x)$ auftretende Koeffizient $q \cdot a_q$ gleich 0, wenn $a_q = 0$ oder q durch p teilbar ist (§ 4, 4.); daher verschwindet

$f'(x)$ dann und nur dann, wenn in $f(x)$ nur Potenzen von x, deren Exponent durch p teilbar ist, wirklich vorkommen — mit andern Worten, wenn $f(x)$ ganze Funktion von x^p ist. — Haben wir eine rationale Funktion in $\Re$, die wir als Quotienten zweier ganzen Funktionen in der reduzierten Form $\frac{u}{v}$ darstellen, so wird ihre Ableitung $\frac{vu'-uv'}{v^2}$, also nur dann gleich 0, wenn $vu'=uv'$ ist. Da u und v teilerfremd sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn v in v', u in u' aufgeht (§ 5, 3.). Das ist aber, da die Grade von u' und v' bez. kleiner sind als die Grade von u und v, nur möglich, wenn $u'=0$, $v'=0$ ist, wenn also u und v von x frei oder, im Falle der Charakteristik p, Funktionen von x^p sind. Es gilt also der Satz:

1. *Für das Verschwinden der Ableitung einer rationalen Funktion $R(x)$ ist notwendig und hinreichend, daß $R(x)$ von x frei bezw. rationale Funktion von x^p ist, je nachdem die Charakteristik 0 oder p ist.*

Es sei jetzt $f(x)$ eine ganze Funktion in einem Körper $\Re$. Innerhalb eines geeigneten Erweiterungskörpers zerfällt $f(x)$ in Linearfaktoren, und wenn $x-\alpha$ ein r-facher Faktor ist ($r>0$), so hat man

$$(1.) \qquad f(x)=(x-\alpha)^r g(x),$$

wo $g(x)$ den Faktor $x-\alpha$ nicht mehr enthält. Aus (1.) folgt

$$(2.) \qquad f'(x)=(x-\alpha)^{r-1}(r\varepsilon g(x)+(x-\alpha)g'(x)),$$

woraus zu ersehen, daß die Ableitung $f'(x)$ den Faktor $x-\alpha$ wenigstens $(r-1)$-mal enthält, und daß sie ihn genau $(r-1)$-mal enthält, wenn $r\varepsilon \neq 0$ ist. Wenn aber $\Re$ die Charakteristik p hat und r durch p teilbar ist, so wird $r\varepsilon=0$, und $f'(x)=(x-\alpha)^r g'(x)$ ist durch $(x-\alpha)^r$ teilbar. Also gilt der Satz:

2. *Besitzt $f(x)$ einen r-fachen Linearfaktor ($r\geqq 1$), so hat die Ableitung $f'(x)$ diesen Faktor wenigstens $(r-1)$-mal; sie hat ihn wenigstens r-mal, falls der Körper $\Re$, zu welchem $f(x)$ gehört, die Charakteristik p hat und r durch die Primzahl p teilbar ist, sonst genau $(r-1)$-mal.* (Wenn die Ableitung verschwindet, so ist sie durch jede noch so hohe Potenz von $x-\alpha$ teilbar, enthält also in diesem Sinne den Faktor $x-\alpha$ unendlich oft).

Aus 2. folgt leicht für Körper beliebiger Charakteristik:

3. *Hat $f(x)$ nur einfache Faktoren, so ist der größte gemeinsame Teiler*

$$(f(x), f'(x))$$

von $f(x)$ und $f'(x)$ gleich ε, sonst wenigstens vom ersten Grade.

Es sei

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \cdot (x-\alpha_2)^{r_2} \cdots (x-\alpha_\nu)^{r_\nu}, \tag{3.}$$

wo die Nullstellen α_i voneinander verschieden und die Exponenten $r_i > 0$ sein sollen. Ist die Charakteristik gleich p und $f(x)$ die p-te Potenz einer ganzen Funktion (des ursprünglichen oder eines Erweiterungskörpers), so sind alle Exponenten r_i durch p teilbar. Daher enthält nach 2. $f'(x)$ jeden Faktor $x-\alpha_i$ wenigstens so oft als $f(x)$, ist also durch $f(x)$ teilbar. Da aber der Grad von $f'(x)$ kleiner als der Grad von $f(x)$ ist, so ist dies nur möglich, wenn $f'(x) = 0$ ist. Dies folgt auch unmittelbar daraus, daß man aus einer Gleichung von der Form $f(x) = [\varphi(x)]^p$ durch Differenzieren $f'(x) = p[\varphi(x)]^{p-1} \cdot \varphi'(x)$, also im Falle der Charakteristik p, $f'(x) = 0$ erhält. Daraus folgt aber, daß $f(x)$ eine ganze Funktion von x^p ist. Wird umgekehrt $f(x)$ als ganze Funktion von x^p vorausgesetzt, so verschwindet $f'(x)$, und aus 2. folgt, daß alle Exponenten r_i durch p teilbar sind. Es gilt also:

4. *Ist im Falle der Charakteristik p $f(x)$ ganze Funktion von x^p, so ist $f(x)$ die p-te Potenz einer ganzen Funktion und umgekehrt.*

Wir können dieses Resultat noch auf anderem Wege herleiten: Sind a und b irgend zwei Elemente eines Körpers $\mathfrak{R}$ von der Charakteristik p, so ergibt die binomische Entwicklung

$$(a+b)^p = a^p + b^p,$$

weil alle andern Glieder der Entwicklung einen durch p teilbaren Zahlenkoeffizienten haben, also verschwinden. Erhebt man die vorstehende Gleichung zur p-ten Potenz, so erhält man

$$(a+b)^{p^2} = (a^p + a^p)^p = a^{p^2} + b^{p^2}$$

und, so fortfahrend, allgemein

$$(a+b)^{p^f} = a^{p^f} + b^{p^f} \tag{4.}$$

für jede natürliche Zahl f. Ebenso gilt

$$(5.) \qquad (a-b)^{p^l} = a^{p^l} - b^{p^l}.$$

Dies folgt für ungerades p durch dieselbe Entwickelung. Ist aber $p=2$, so wird $2b=0$, $2b^{p^l}=0$, also $-b=b$, $-b^{p^l}=b^{p^l}$, und die Formeln (4.) und (5.) werden identisch. Aus (4.) folgt unmittelbar

$$(4'.) \qquad (a_1+a_2+\cdots+a_n)^{p^l} = a_1^{p^l}+a_2^{p^l}+\cdots+a_n^{p^l}.$$

Wir können diese Gleichung auch auf ganze Funktionen einer Unbestimmten x im Körper $\mathfrak{R}$ anwenden, da diese dem Körper $\mathfrak{R}(x)$ angehören, welcher ja auch die Charakteristik p hat (§ 4, 3.). Dann sieht man sofort, daß die p^l-te Potenz einer solchen Funktion eine ganze Funktion von x^{p^l} ist. Ist umgekehrt $f(x)$ eine ganze Funktion von x^{p^l}:

$$f(x) = c_0 + c_1 x^{p^l} + c_2 x^{2p^l} + \cdots + c_n x^{np^l}$$

und erweitern wir den Körper $\mathfrak{R}$ zu einem Körper $\mathfrak{L}$, innerhalb dessen die Funktionen $x^{p^l}-c_0$, $x^{p^l}-c_1, \ldots x^{p^l}-c_n$ in Linearfaktoren zerfallen, so kann man in $\mathfrak{L}$ die Elemente $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ so bestimmen, daß $\gamma_k^{p^l}=c_k$ wird. Dann folgt aber

$$f(x) = (\gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\cdots+\gamma_n x^n)^{p^l}.$$

Damit ist Satz 4. wiederum, nur in etwas allgemeinerer Fassung bewiesen:

4ª. *Ist im Falle der Charakteristik p $f(x)$ ganze Funktion von x^{p^l}, so ist $f(x)$ p^l-te Potenz einer ganzen Funktion von x, und umgekehrt.*

Es sei $F(x)$ eine ganze Funktion der Unbestimmten x in einem Körper $\mathfrak{R}$ beliebiger Charakteristik, der Koeffizient der höchsten Potenz von x sei gleich ε, und es stelle

$$(6.) \qquad F(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_\nu)^{r_\nu}$$

die Zerlegung von $F(x)$ in einem geeigneten Erweiterungskörper dar ($\alpha_1, \ldots \alpha_\nu$ als verschieden vorausgesetzt). Wir bezeichnen mit $f_m(x)$ für jede natürliche Zahl m das Produkt derjenigen einfach genommenen Linearfaktoren von $F(x)$, welche in $F(x)$ m-fach auftreten. Sind keine solchen vorhanden, so ist $f_m(x)=\varepsilon$ zu setzen. Hiernach ist

$$(7.) \qquad F(x) = f_1(x)\cdot(f_2(x))^2\cdot(f_3(x))^3\cdots.$$

Wir wollen nun folgende Sätze beweisen:

5. *Ist die Charakteristik von* $\Re$ *gleich* 0, *so gehört jede der Funktionen* $f_m(x)$ *dem Körper* $\Re$ *an und kann rational ermittelt werden.*

6. *Ist die Charakteristik von* $\Re$ *gleich* p, m *durch* p *nicht teilbar, so gehört* $f_m(x)$ *dem Körper* $\Re$ *an und kann rational ermittelt werden.*

7. *Ist die Charakteristik von* $\Re$ *gleich* p, $\pi = p^l$ *die höchste in* m *enthaltene Potenz von* p, *so gehört* $(f_m(x))^\pi$ *dem Körper* $\Re$ *an und kann rational ermittelt werden.*

Bezeichnet nämlich $F'(x)$ die Ableitung von $F(x)$ nach x, so folgt aus 2., daß die zum Körper $\Re$ gehörige Funktion

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{(F(x), F'(x))}$$

im Falle der Charakteristik 0 gleich dem Produkt *aller*, im Falle der Charakteristik p gleich dem Produkt *derjenigen* einfach genommenen Linearfaktoren $x - \alpha_k$ ist, für welche der Exponent r_k in Gleichung (6) durch p nicht teilbar ist. Betrachten wir jetzt den Ausdruck

$$\chi_m(x) = \frac{((\varphi(x))^m, F(x))}{((\varphi(x))^{m-1}, F(x))}. \qquad (m \geqq 1)$$

Derselbe ist eine ganze aus Faktoren $x - \alpha_k$ zusammengesetzte Funktion und kann im Falle der Charakteristik p nur solche Faktoren $x - \alpha_k$ enthalten, für welche r_k durch p nicht teilbar ist. Setzen wir dies im Falle der Charakteristik p bezüglich r_k voraus, so enthält für $r_k < m$ sowohl der Zähler als der Nenner des Ausdrucks $\chi_m(x)$ den Faktor $x - \alpha_k$ genau r_k-mal. Ist $r_k \geqq m$, so ist $x - \alpha_k$ im Zähler m-mal, im Nenner $(m-1)$-mal enthalten. $\chi_m(x)$ stellt daher das Produkt derjenigen Linearfaktoren $x - \alpha_k$ dar, für welche $r_k \geqq m$ und im Falle der Charakteristik p durch p nicht teilbar ist. Hieraus ergibt sich, daß

$$\frac{\chi_m(x)}{\chi_{m+1}(x)} = f_m(x)$$

wird, sofern nicht die Charakteristik gleich p und m durch p teilbar ist.

Damit sind die Sätze 5. und 6. bewiesen. Satz 7. fällt im Falle $f = 0$ mit Satz 6. zusammen. Wir beweisen Satz 7. durch Induktion, indem wir annehmen, er sei für jedes m bewiesen, welches die Primzahl p weniger als f-mal als Faktor enthält. Dann sind diejenigen Faktoren

$(f_m(x))^m$, in welchen m durch $\pi = p^l$ nicht teilbar ist, als dem Körper $\mathfrak{R}$ angehörig erwiesen und ermittelt zu betrachten. Dividieren wir daher auf beiden Seiten von (7.) durch diese Faktoren, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$(8.) \qquad \Phi(x) = (f_\pi(x))^\pi \cdot (f_{2\pi}(x))^{2\pi} \cdots,$$

wo $\Phi(x)$ eine bekannte Funktion aus $\mathfrak{R}$ ist. Es sei

$$(9.) \qquad \Phi(x) = (x-\beta_1)^{\varrho_1 \pi} \cdot (x-\beta_2)^{\varrho_2 \pi} \cdots (x-\beta_\lambda)^{\varrho_\lambda \pi}$$

die Zerlegung von $\Phi(x)$ in Potenzen verschiedener Linearfaktoren und $m = \mu \cdot \pi$, wo μ den Faktor p nicht mehr enthält. Die Funktionen $(f_{k\pi}(x))^\pi$ sind ganze Funktionen von x^π (Satz 4a.), dasselbe gilt also für $\Phi(x)$. Setzen wir jetzt

$$x^\pi = y, \quad \beta_l^\pi = \gamma_l, \quad (f_{k\pi}(x))^\pi = g_k(y), \quad \Phi(x) = G(y),$$

so gehen die Gleichungen (8.), (9.) über in

$$(10.) \qquad G(y) = g_1(y) \cdot (g_2(y))^2 \cdot (g_3(y))^3 \cdots,$$

$$(11.) \qquad G(y) = (y-\gamma_1)^{\varrho_1} \cdot (y-\gamma_2)^{\varrho_2} \cdots (y-\gamma_\lambda)^{\varrho_\lambda},$$

wobei $G(y)$ eine bekannte Funktion aus $\mathfrak{R}$ ist. Die Nullstellen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\lambda$ sind verschieden; denn aus $\gamma_k = \gamma_l$ würde folgen

$$0 = \gamma_k - \gamma_l = \beta_k^\pi - \beta_l^\pi = (\beta_k - \beta_l)^\pi,$$

$$0 = \beta_k - \beta_l, \quad \beta_k = \beta_l,$$

während $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\lambda$ als verschieden vorausgesetzt wurden. $g_\mu(y)$ ist das Produkt derjenigen einfach genommenen in bezug auf y linearen Faktoren $y-\gamma_l$, für welche $\varrho_l = \mu$ ist. Da nach Voraussetzung μ durch p nicht teilbar ist, so ist nach 6. $g_\mu(y)$ Funktion in $\mathfrak{R}$ und rational zu ermitteln. Setzen wir in $g_\mu(y)$ für y wieder x^π ein, so erhalten wir, da $m = \mu\pi$,

$$g_\mu(y) = (f_m(x))^\pi,$$

womit 7. bewiesen ist.

Hiernach ist in allen Fällen $(f_m(x))^m$ Funktion in $\mathfrak{R}$ und rational zu ermitteln. Dividieren wir den Grad dieser Funktion durch m, so haben wir die Anzahl der m-fachen Nullstellen der Funktion $F(x)$.

§ 11.

Vollkommene und unvollkommene Körper.

In § 7 wurde gezeigt, daß eine Reihe von Sätzen der *Galois*schen Theorie in jedem Körper gelten. Soll aber diese Theorie in einem Körper $\mathfrak{K}$ in allen ihren Grundzügen unverändert bestehen, so bedarf es noch des Satzes, daß eine in $\mathfrak{K}$ irreduzible ganze Funktion nur einfache Nullstellen haben kann. Dieser Satz besteht jedoch nicht in voller Allgemeinheit, und wir werden so zu einer Unterscheidung genötigt, der wir durch die folgende Definition Ausdruck geben:

Ein Körper $\mathfrak{K}$ soll vollkommen heißen, wenn jede ganze Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{K}$, welche (in einem geeigneten Erweiterungskörper) mehrfache Nullstellen besitzt, in $\mathfrak{K}$ reduzibel ist; dagegen unvollkommen, wenn es in $\mathfrak{K}$ irreduzible Funktionen mit mehrfachen Nullstellen gibt.

Wir erhalten die einfachen Kriterien:

1. *Jeder Körper von der Charakteristik 0 ist vollkommen.*

2. *Unter den Körpern, deren Charakteristik eine Primzahl p ist, gibt es vollkommene und unvollkommene; ein solcher Körper ist vollkommen, wenn sich in ihm die Ausziehung der p-ten Wurzel (die sich hier als eindeutige Operation erweist) ausnahmslos ausführen läßt, sonst unvollkommen.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß es in einem Körper $\mathfrak{K}$ von der Charakteristik p nie mehr als eine p-te und daher auch nie mehr als eine p^f-te Wurzel aus einem Element γ geben kann. Denn wenn für zwei Elemente α, β $\alpha^p = \beta^p = \gamma$ wird, so folgt (vergl. S. 217, Z. 17—19) $0 = \alpha^p - \beta^p = (\alpha - \beta)^p$, daher $\alpha - \beta = 0, \alpha = \beta$. Hieran kann auch keine Erweiterung von $\mathfrak{K}$ etwas ändern, da ja die Charakteristik p bleibt. Die Funktion $x^{p^f} - \gamma$ ist daher in $\mathfrak{K}$ bezw. in einem Erweiterungskörper, in welchem sie vollständig zerfällt, p^f-te Potenz eines Linearfaktors:

$$x^{p^f} - \gamma = (x - \delta)^{p^f},$$

was übrigens auch aus § 10, 4ª. folgt. Der Primkörper $\mathfrak{P}_p$ (§ 4) liefert das einfachste Beispiel eines Körpers, in welchem die Ausziehung der p-ten Wurzel unbeschränkt ausführbar ist. Denn nach dem *Fermat*schen Satze gilt für jedes Element von $\mathfrak{P}_p$ die Gleichung $a^p = a$, also auch $\sqrt[p]{a} = a$. Es sei jetzt $\mathfrak{K}$ irgendein Körper von der Charakteristik p; wir erweitern

ihn durch Adjunktion eines transzendenten Elementes u zu $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(u)$. Ist α ein Element von $\mathfrak{L}$, so ist α entweder Element von $\mathfrak{K}$, und dann gilt dasselbe von α^p, oder α gehört nicht zu $\mathfrak{K}$; dann hat α als rationale Funktion von u betrachtet einen bestimmten Grad >0, und der Grad von α^p ist dann das p-fache dieses Grades (§ 5, 6.). In keinem Falle kann $\alpha^p = u$ sein, das Element u des Körpers $\mathfrak{L}$ besitzt also in $\mathfrak{L}$ keine p-te Wurzel. — Es sei nun wieder $\mathfrak{K}$ irgendein Körper von der Charakteristik p, γ irgendein Element von $\mathfrak{K}$, dann hat man für die Funktion $x^{p^f} - \gamma$ entweder in $\mathfrak{K}$ selbst oder in einem Erweiterungskörper die Zerlegung

$$(1.) \qquad x^{p^f} - \gamma = (x - \delta)^{p^f}.$$

Zerlegt man also $x^{p^f} - \gamma$ in $\mathfrak{K}$ selbst in irreduzible Faktoren, so sind alle diese Faktoren Potenzen von $x - \delta$, und alle müssen denselben Exponenten haben, weil sonst ein Faktor mit größerem Exponenten durch den mit kleinerem teilbar, also nicht irreduzibel wäre. Der in $\mathfrak{K}$ irreduzible Faktor hat daher die Form

$$(2.) \qquad (x - \delta)^{p^r} = x^{p^r} - \delta^{p^r},$$

wo $0 \leqq r \leqq f$ ist. Der Fall $r = 0$ tritt dann ein, wenn δ, d. h. die p^f-te Wurzel aus γ dem Körper $\mathfrak{K}$ angehört. Ist aber die p-te (also auch die p^f-te) Wurzel aus γ in $\mathfrak{K}$ nicht vorhanden, so ist $r > 0$, und dann ist $x^{p^r} - \delta^{p^r}$ eine in $\mathfrak{K}$ irreduzible Funktion mit $p^r > 1$ gleichen Nullstellen. Der Körper $\mathfrak{K}$ ist also unvollkommen.

Nehmen wir jetzt an, es habe $\mathfrak{K}$ entweder die Charakteristik 0, oder es habe $\mathfrak{K}$ die Charakteristik p, es sei aber zu jedem Element von $\mathfrak{K}$ die p-te Wurzel in $\mathfrak{K}$ selbst enthalten. Ist dann $f(x)$ eine ganze Funktion n-ten Grades in $\mathfrak{K}$, welche mehrfache Nullstellen besitzt, so ist

$$(f(x), f'(x))$$

wenigstens vom Grade 1. Ist $f'(x)$ von 0 verschieden, so ist der Grad von $(f(x), f'(x))$ wie der von $f'(x)$ kleiner als n, $f(x)$ ist also reduzibel. Ist aber $f'(x) = 0$, was nur vorkommen kann, wenn die Charakteristik eine Primzahl p ist, so ist $f(x)$ ganze Funktion von x^p:

$$f(x) = a_0 + a_1 x^p + \cdots + a_\nu x^{\nu p} \quad (\nu p = n),$$

und daraus folgt

$$f(x) = (\sqrt[p]{a_0} + \sqrt[p]{a_1}\, x + \cdots + \sqrt[p]{a_\nu}\, x^\nu)^p,$$

wo nach unserer Voraussetzung die Elemente $\sqrt[p]{a_0}, \sqrt[p]{a_1}, \ldots \sqrt[p]{a_\nu}$ dem Körper $\mathfrak{K}$ angehören; also ist auch in diesem Falle $f(x)$ in $\mathfrak{K}$ reduzibel. — Damit sind die Sätze 1. und 2. bewiesen.

Aus den Sätzen der gewöhnlichen *Galois*schen Theorie, welche nicht ausnahmslos in allen Körpern gelten, heben wir zwei hervor, die, wie später gezeigt werden wird, im engsten Zusammenhange miteinander stehen und als *Satz der primitiven Elemente* und *Satz der Zwischenkörper* bezeichnet werden mögen. Der erste sagt aus, *daß jede endliche Erweiterung einfach ist*, der zweite, *daß zwischen einem Körper $\mathfrak{K}$ und einer endlichen Erweiterung $\mathfrak{L}$ desselben immer nur endlich viele Körper liegen.* Ausnahmslos giltig ist, wie leicht zu sehen, die Umkehrung des letztgenannten Satzes:

3. *Liegen zwischen einem Körper $\mathfrak{K}$ und seinem Erweiterungskörper $\mathfrak{L}$ nur endlich viele Körper, so ist $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ endlich.*

Zunächst nämlich kann $\mathfrak{L}$ kein Element x enthalten, das in bezug auf $\mathfrak{K}$ transzendent ist; denn andernfalls hätte man unendlich viele Körper

$$\mathfrak{K}(x), \mathfrak{K}(x^2), \mathfrak{K}(x^3), \ldots, \mathfrak{K}(x^n), \ldots,$$

die alle, wie sofort (z. B. aus § 5, 6.) zu ersehen, voneinander verschieden sind und zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ liegen. Nach § 2, 3. gehört jedes Element von $\mathfrak{L}$ einem Körper $\mathfrak{K}_i$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ an, der aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines Systems $\mathfrak{S}_i$ von endlich vielen Elementen hervorgeht. Diese Körper sind aber der Voraussetzung gemäß nur in endlicher Zahl vorhanden. Bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$, mit $\mathfrak{S}_i (i = 1, \ldots n)$ ein endliches System von Elementen, für welches $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}_i) = \mathfrak{K}_i$ wird, mit $\mathfrak{S}$ das endliche System, welches alle Elemente der Systeme $\mathfrak{S}_i$ umfaßt, so enthält $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ alle Körper $\mathfrak{K}_i$, es wird also $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{L}$. Da ferner die Elemente von $\mathfrak{S}$ nur in endlicher Zahl vorhanden und, wie wir sahen, in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch sind, so ist (§ 7, 6.) $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ endlich.

Der Satz der primitiven Elemente in der gewöhnlichen *Galois*schen Theorie beruht auf dem für alle Körper giltigen Satze:

4. *Geht der Körper $\mathfrak{L}$ aus seinem Teilkörper $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion von endlich vielen Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ hervor, deren jedes in $\mathfrak{K}$ einer Gleichung*

mit nur einfachen Wurzeln genügt, so ist $\mathfrak{L}$ *in bezug auf* $\mathfrak{K}$ *einfach und kann aus* $\mathfrak{K}$ *auch durch Adjunktion eines Elementes erhalten werden, welches ebenfalls in* $\mathfrak{K}$ *einer Gleichung mit nur einfachen Wurzeln genügt.*

Es ist natürlich nur nötig, den Beweis für den Fall zu führen, daß $\mathfrak{L}$ aus $\mathfrak{K}$ zunächst durch Adjunktion zweier Elemente α, β abgeleitet ist; durch Wiederholung derselben Schlußweise ergibt sich dann dasselbe Resultat für jede beliebige endliche Anzahl. — *Wir führen den Beweis hier unter der Voraussetzung, daß* $\mathfrak{K}$ *unendlich viele Elemente enthält; für den Fall eines Körpers von endlich vielen Elementen wird sich unten* (§ 15, 9.) *ein anderer Beweis ergeben.* — Es seien also jetzt $f(x)$ und $g(x)$ ganze Funktionen aus $\mathfrak{K}$, welche für $x = \alpha$ bzw. $x = \beta$ verschwinden und in einem geeigneten Erweiterungskörper $\mathfrak{M}$ in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfallen. Die Zerlegungen seien

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_m),$$
$$g(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdots (x - \beta_n),$$

wobei α_1 und β_1 für α und β gesetzt ist. Unserer Voraussetzung gemäß sind die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ alle voneinander verschieden, ebenso $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$. Ist μ irgendein Element aus $\mathfrak{K}$, so ist $\alpha + \mu\beta$ ein Element aus $\mathfrak{K}(\alpha, \beta) = \mathfrak{L}$. Betrachten wir nun die $m \cdot n$ Elemente $\alpha_i + \mu\beta_k$. Wenn zwei derselben $\alpha_i + \mu\beta_k$ und $\alpha_r + \mu\beta_s$ einander gleich sind, ohne daß zugleich $i = r$, $k = s$ ist, so ist $\beta_k \neq \beta_s$, da sonst $k = s$, $\alpha_i = \alpha_r$, $i = r$ folgen würde. Man erhält also in diesem Falle

$$\mu = \frac{\alpha_r - \alpha_i}{\beta_k - \beta_s}. \tag{3.}$$

Da nun aber in dieser Form nur eine endliche Anzahl von Elementen dargestellt wird, $\mathfrak{K}$ aber unendlich viele enthält, so können und wollen wir aus $\mathfrak{K}$ ein Element μ auswählen, welches nicht die Form (3.) hat, und halten dieses im folgenden fest. Nunmehr sei $\delta = \delta_1$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{K}(\alpha, \beta)$, also eine ganze Funktion $\chi(\alpha, \beta) = \chi(\alpha_1, \beta_1)$ von α und β mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$. Wir bezeichnen mit

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_{mn},$$
$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{mn}$$

diejenigen Elemente von $\mathfrak{M}$, welche aus

$$\gamma = \gamma_1 = \alpha + \mu\beta, \quad \delta = \delta_1 = \chi(\alpha, \beta)$$

hervorgehen, wenn für α, β alle möglichen Kombinationen α_i, β_k gesetzt werden, und bilden die Funktion

$$h(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\cdots(x-\gamma_{mn}).$$

Da nach dem vorstehenden die Elemente $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{mn}$ sämtlich verschieden sind, so sind

$$\frac{h(x)}{x-\gamma_1}, \quad \frac{h(x)}{x-\gamma_2}, \quad \cdots \quad \frac{h(x)}{x-\gamma_{mn}}$$

ganze Funktionen von x, deren erste für $x = \gamma_1$ den von 0 verschiedenen Wert $h'(\gamma_1)$ annimmt (wenn $h'(x)$ die Ableitung von $h(x)$ bezeichnet), während die andern für $x = \gamma_1$ verschwinden. Die Funktion $h(x)$ ist symmetrisch in $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ und in $\beta_1, \ldots \beta_n$, also Funktion in $\mathfrak{R}$; daher ist auch $h'(x)$ Funktion in $\mathfrak{R}$. Endlich ist auch die Funktion

$$(4.) \qquad \varphi(x) = \frac{h(x)}{x-\gamma_1}\delta_1 + \frac{h(x)}{x-\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \frac{h(x)}{x-\gamma_{mn}}\delta_{mn}$$

symmetrisch in $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ und in $\beta_1, \ldots \beta_n$, also Funktion in $\mathfrak{R}$. Setzt man in (4.) $x = \gamma_1 = \gamma$, so erhält man

$$\varphi(\gamma) = h'(\gamma)\cdot\delta, \quad \delta = \frac{\varphi(\gamma)}{h'(\gamma)},$$

woraus zu ersehen, daß δ dem Körper $\mathfrak{R}(\gamma)$ angehört. Da γ dem Körper $\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$ angehört, δ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$ ist, so folgt

$$\mathfrak{R}(\alpha, \beta) = \mathfrak{R}(\gamma).$$

Ferner hat die Gleichung $h(x) = 0$, welcher γ im Körper $\mathfrak{R}$ genügt, lauter einfache Wurzeln; somit ist **4.** bewiesen.

Ist $\mathfrak{R}$ ein vollkommener Körper, so haben die in $\mathfrak{R}$ irreduziblen Gleichungen, welche durch α und β befriedigt werden, nur einfache Nullstellen; die von α und β bei Satz **4.** gemachten Voraussetzungen treffen also hier stets zu. Daraus folgt nach § 7, 6.:

5. *Jede endliche Erweiterung eines vollkommenen Körpers ist einfach.*

Um nun zu zeigen, daß weder der Satz der primitiven Elemente noch der Satz der Zwischenkörper uneingeschränkte Gültigkeit haben, beweisen wir gleich hier den folgenden Satz, den wir später bei den eingehenderen Untersuchungen über diesen Gegenstand brauchen werden:

6. *Ist* $\mathfrak{k}$ *ein Körper von der Charakteristik* p, $\mathfrak{L}$ *eine Erweiterung von* $\mathfrak{k}$, *ist die* p*-te Potenz jedes Elementes von* $\mathfrak{L}$ *in* $\mathfrak{k}$ *enthalten, aber* $[\mathfrak{L}:\mathfrak{k}]>p$ *(sofern* $\mathfrak{L}$ *in bezug auf* $\mathfrak{k}$ *überhaupt endlich ist), so ist* $\mathfrak{L}$ *keine einfache Erweiterung, und es liegen zwischen* $\mathfrak{k}$ *und* $\mathfrak{L}$ *unendlich viele Körper.*

Beweis: Die erste Behauptung leuchtet unmittelbar ein; denn der Grad eines primitiven Elementes müßte gleich $[\mathfrak{L}:\mathfrak{k}]>p$ sein, während doch aus der Voraussetzung folgt, daß jedes Element von $\mathfrak{L}$ einer Gleichung vom Grade p in $\mathfrak{k}$ genügt. — Was die zweite Behauptung anlangt, so folgt aus der Voraussetzung zunächst, daß $\mathfrak{k}$ ein unvollkommener Körper ist; denn sonst würden die Elemente von $\mathfrak{L}$, die ja p-te Wurzeln aus Elementen von $\mathfrak{k}$ sind, sämtlich zu $\mathfrak{k}$ gehören, es wäre also $[\mathfrak{L}:\mathfrak{k}]=1$. Daraus folgt weiter, daß $\mathfrak{k}$ unendlich viele Elemente enthält, weil alle Körper mit nur endlich vielen Elementen vollkommen sind (s. § 12, 2.). Es sei nun α irgendein in $\mathfrak{L}$, aber nicht in $\mathfrak{k}$ enthaltenes Element. Dann ist α Nullstelle der Funktion $x^p-\alpha^p$ des Körpers $\mathfrak{k}$, welche in diesem Körper irreduzibel ist. $\mathfrak{k}(\alpha)$ ist ein Körper zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}$ und von $\mathfrak{L}$ verschieden, weil $[\mathfrak{k}(\alpha):\mathfrak{k}]=p$ ist. Es sei β ein zu $\mathfrak{L}$ aber nicht zu $\mathfrak{k}(\alpha)$ gehöriges Element; dann ist auch $[\mathfrak{k}(\beta):\mathfrak{k}]=p$, und $\mathfrak{k}(\alpha)$ und $\mathfrak{k}(\beta)$ sind verschieden. Sind nun $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \ldots$ unendlich viele voneinander und von 0 verschiedene Elemente aus $\mathfrak{k}$, so gehören alle Elemente $\omega_k=\alpha+\mu_k\beta$ dem Körper $\mathfrak{L}$, aber keines dem Körper $\mathfrak{k}$ an. Denn gehörte ω_k zu $\mathfrak{k}$, so gehörte $\alpha=\omega_k-\mu_k\beta$ zu $\mathfrak{k}(\beta)$, was nicht der Fall sein kann, weil α und β in bezug auf $\mathfrak{k}$ von gleichem Grade und $\mathfrak{k}(\alpha)$ und $\mathfrak{k}(\beta)$ verschieden sind. Die Körper $\mathfrak{k}(\omega_k)$ liegen alle zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}$, sind in bezug auf $\mathfrak{k}$ vom Grade p und sämtlich voneinander verschieden. Denn aus $\mathfrak{k}(\omega_k)=\mathfrak{k}(\omega_l)$ würde folgen, daß

$$\alpha=\frac{\mu_l\omega_k-\mu_k\omega_l}{\mu_l-\mu_k} \quad \text{und} \quad \beta=\frac{\omega_l-\omega_k}{\mu_l-\mu_k}$$

dem Körper $\mathfrak{k}(\omega_k)=\mathfrak{k}(\omega_l)$ angehörten, also in bezug auf $\mathfrak{k}$ primitive Elemente

dieses Körpers wären. Dann aber wäre $\mathfrak{k}(\alpha) = \mathfrak{k}(\omega_k) = \mathfrak{k}(\beta)$, während doch $\mathfrak{k}(\alpha)$ und $\mathfrak{k}(\beta)$ bereits als verschieden nachgewiesen wurden. Es liegen also unendlich viele Körper $\mathfrak{k}(\omega_k)$ zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}$. Damit ist 6. vollständig bewiesen.

Es läßt sich nun leicht nachweisen, daß die Voraussetzungen des Satzes 6. durch endliche Erweiterungen realisierbar sind. Zu diesem Zweck adjungieren wir einem beliebigen Körper $\mathfrak{M}$ von der Charakteristik p zwei transzendente Elemente t, u und betrachten neben dem Körper $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}(t, u)$ noch die Körper $\mathfrak{k} = \mathfrak{M}(t^p, u^p)$, $\mathfrak{k}' = \mathfrak{M}(t, u^p)$. Dann kommt weder t in $\mathfrak{k}$ noch u in $\mathfrak{k}'$ vor, und es wird daher die Funktion $x^p - t^p$ in $\mathfrak{k}$, die Funktion $x^p - u^p$ in $\mathfrak{k}'$ irreduzibel, woraus

$$[\mathfrak{L}:\mathfrak{k}] = [\mathfrak{k}':\mathfrak{k}]\cdot[\mathfrak{L}:\mathfrak{k}'] = [t:\mathfrak{k}]\cdot[u:\mathfrak{k}'] = p^2$$

folgt. Ist andererseits v irgendein Element aus $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}(t, u)$ und stellen wir dasselbe in der Form $v = \frac{v_1}{v_2}$ dar, wo v_1 und v_2 dem Integritätsbereich $\mathfrak{M}[t, u]$ angehören, so stellen sich v_1 und v_2 als Summen von Gliedern von der Form $ct^m u^n$ dar, wo c Element von $\mathfrak{M}$ ist. Dann werden aber v_1^p, v_2^p Summen aus Gliedern von der Form $c^p t^{mp} u^{np}$ (§ 10, (4'.)), gehören also dem Integritätsbereich $\mathfrak{M}[t^p, u^p]$ an. Daher ist $v^p = \frac{v_1^p}{v_2^p}$ Element des Körpers $\mathfrak{k} = \mathfrak{M}(t^p, u^p)$ und somit die Erweiterung $\mathfrak{L}$ des Körpers $\mathfrak{k}$, obgleich endlich, doch nicht einfach, und es liegen unendlich viele Körper zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}$.

§ 12.

Unvollkommene Körper: Kleinster enthaltender und größter enthaltener vollkommener Körper. — Wurzelkörper.

Ist $\mathfrak{k}$ ein Körper von der Charakteristik p und sind a und b Elemente von $\mathfrak{k}$, so gelten die Gleichungen

$$(1.) \qquad \begin{cases} a^p + b^p = (a+b)^p, & a^p - b^p = (a-b)^p, \\ a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p, & a^p : b^p = (a : b)^p. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen lesen wir folgendes Resultat ab:

1. *Die p-ten Potenzen aller Elemente eines Körpers $\mathfrak{K}$ von der Charakteristik p bilden einen Körper $\mathfrak{K}^p$. Ist der Körper $\mathfrak{K}$ vollkommen, so ist $\mathfrak{K}^p$ mit $\mathfrak{K}$ identisch, sonst nur ein Teil von $\mathfrak{K}$* (§ 11, 2.). *Man erhält eine isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^p$, indem man jedem Element von $\mathfrak{K}$ seine p-te Potenz zuordnet.*

Da die isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^p$ eine ein-eindeutige ist, so muß, wenn $\mathfrak{K}$ nur endlich viele Elemente besitzt, $\mathfrak{K}^p = \mathfrak{K}$ sein. Also:

2. *Jeder Körper, der nur endlich viele Elemente besitzt, ist vollkommen.*

Wir bilden, von einem Körper $\mathfrak{K}$ mit der Charakteristik p ausgehend, die unendliche Körperfolge

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{p^0},\ \mathfrak{K}^p,\ \mathfrak{K}^{p^2}, \ldots \mathfrak{K}^{p^f}, \ldots,$$

in welcher allgemein $\mathfrak{K}^{p^f}$ den Körper bezeichnet, welcher aus den p-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{K}^{p^{f-1}}$, also den p^f-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{K}$ besteht. Alle diese Körper sind isomorph, daher entweder alle vollkommen oder alle unvollkommen; im ersten Fall ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^p = \mathfrak{K}^{p^2} = \cdots$, im zweiten, hier allein interessierenden, ist jeder folgende Körper nur ein Teil des vorhergehenden. Wir können diese Folge auch nach der entgegengesetzten Richtung fortsetzen. Dann haben wir zunächst den Körper $\mathfrak{K}$ zu einem solchen Körper $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$ zu erweitern, daß $\mathfrak{K}$ aus den p-ten Potenzen aller Elemente von $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$ besteht. Hierzu bemerken wir zunächst, daß jedes Element von $\mathfrak{K}$ in der Form $\sqrt[p]{a}$ geschrieben werden kann, wo a Element von $\mathfrak{K}^p$ ist. Sind nun $\sqrt[p]{a}$ und $\sqrt[p]{b}$ irgend zwei Elemente von $\mathfrak{K}$, so gilt, wie aus (1.) sofort zu ersehen:

1) $\sqrt[p]{a}$ ist dann und nur dann gleich $\sqrt[p]{b}$, wenn $a = b$ ist,

2) $\sqrt[p]{a} + \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a+b}$,

3) $\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a \cdot b}$.

Wir bilden jetzt ein System $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$, indem wir zu $\mathfrak{K}$ noch alle Symbole von der Form $\sqrt[p]{a}$ hinzunehmen, in denen a ein zu $\mathfrak{K}$, nicht aber zu $\mathfrak{K}^p$ gehöriges Element bezeichnet, ohne jedoch zunächst einem solchen Symbol die Be-

deutung einer p-ten Wurzel aus a beizulegen. Wir setzen ferner fest, daß auch, wenn die Elemente a, b von $\mathfrak{K}$ nicht zu $\mathfrak{K}^p$ gehören, oder wenn eines dieser Elemente nicht zu $\mathfrak{K}^p$ gehört, für Gleichheit, Summe, Produkt die unter 1), 2), 3) gemachten Angaben gelten sollen. Dadurch haben wir $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$ zu einem System mit doppelter Komposition gemacht. Aus 1), 2), 3) folgt aber weiter, daß wir eine isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$ erhalten, wenn wir jedem Element a von $\mathfrak{K}$ das Element $\sqrt[p]{a}$ von $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$ zuordnen; mithin ist $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$ wie $\mathfrak{K}$ ein Körper. Wenden wir jetzt die in jedem Körper geltenden Rechnungsregeln an, so erhalten wir unter Bezugnahme auf 3):

$$(\sqrt[p]{a})^p = \sqrt[p]{a^p}.$$

Da nun aber das Element a^p zu $\mathfrak{K}^p$ gehört, so hat $\sqrt[p]{a^p}$ bereits die Bedeutung einer p-ten Wurzel aus a^p, und es ist also $\sqrt[p]{a^p} = a$, daher

$$(\sqrt[p]{a})^p = a,$$

womit die Bedeutung von $\sqrt[p]{a}$ als einer p-ten Wurzel aus a allgemein nachgewiesen ist und zugleich, daß $\mathfrak{K}$ aus den p-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$ besteht. Wenden wir den Schritt, der uns von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}^{p^{-1}}$ führte, wiederholt an, so erhalten wir eine Körperfolge $\mathfrak{K}^{p^{-1}}, \mathfrak{K}^{p^{-2}}, \ldots$, und es ist somit $\mathfrak{K}^{p^n}$ für jedes ganzzahlige n definiert.

3. *Die sämtlichen Elemente, welche in den zu einem Körper $\mathfrak{K}$ von der Charakteristik p gehörigen Körpern $\mathfrak{K}^{p^n}$ auftreten, bilden einen Körper $\mathfrak{C}$, ebenso haben die Körper $\mathfrak{K}^{p^n}$ als Durchschnitt einen Körper $\mathfrak{D}$. Beide Körper $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind vollkommen, und zwar stellt $\mathfrak{D}$ den größten in $\mathfrak{K}$ enthaltenen vollkommenen Körper dar, während sich $\mathfrak{C}$ als ein kleinster vollkommener Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}$ erweist.*

Da nämlich von je zweien der Körper $\mathfrak{K}^{p^n}$ $(n \leqq 0)$ stets einer in dem andern enthalten ist, so ergibt die Gesamtheit aller in diesen Körpern auftretenden Elemente einen Körper (§ 2, 2.). Ist a ein Element dieses Körpers $\mathfrak{C}$ und kommt a etwa in $\mathfrak{K}^{p^n}$ vor, so gibt es in $\mathfrak{K}^{p^{n-1}}$ und mithin in $\mathfrak{C}$ eine p-te Wurzel aus a. Der Körper $\mathfrak{C}$ ist also vollkommen. Wenn wir ihn als *kleinsten* vollkommenen Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}$ bezeichnen,

so soll dies heißen, daß kein von $\mathfrak{C}$ verschiedener Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ vollkommen ist. Ist nämlich $\mathfrak{C}'$ ein Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$, a ein nicht in $\mathfrak{C}'$ enthaltenes Element von $\mathfrak{C}$, n die kleinste natürliche Zahl derart, daß a in $\mathfrak{K}^{p^{-n}}$ vorkommt, so ist a^{p^n} Element von $\mathfrak{K}$, also auch von $\mathfrak{C}'$. Ist nun a^{p^m} unter den Elementen $a^p, a^{p^2}, a^{p^3}, \ldots$ das erste in $\mathfrak{C}'$ enthaltene, so besitzt a^{p^m} in $\mathfrak{C}'$ keine p-te Wurzel, der Körper $\mathfrak{C}'$ ist also unvollkommen. — Ist ferner a ein Element des Durchschnittskörpers $\mathfrak{D}$, n eine beliebige ganze Zahl, so kommt a in $\mathfrak{K}^{p^{n+1}}$, daher $\sqrt[p]{a}$ in $\mathfrak{K}^{p^n}$, d. h. in jedem Körper der Folge $\mathfrak{K}^{p^n}$ und mithin in $\mathfrak{D}$ vor. Der Körper $\mathfrak{D}$ ist also vollkommen. Ist endlich $\mathfrak{D}'$ irgendein vollkommener in $\mathfrak{K}$ enthaltener Körper, a ein beliebiges Element von $\mathfrak{D}'$, n eine beliebig große natürliche Zahl, so besitzt a in $\mathfrak{D}'$ eine p^n-te Wurzel b. Dann gehört b zu $\mathfrak{K}$, und mithin $a = b^{p^n}$ zu $\mathfrak{K}^{p^n}$ d. h. zu allen Körpern unserer Folge, also zu $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}'$ ist also in $\mathfrak{D}$ enthalten und $\mathfrak{D}$ der größte in $\mathfrak{K}$ enthaltene vollkommene Körper.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Körper von der Charakteristik p, a ein Element von $\mathfrak{K}$. Dasselbe bestimmt eine Folge von Elementen

$$a, a^p, a^{p^2}, \ldots,$$

in der jedes Element p-te Wurzel des folgenden ist. Diese Folge können wir, wenn in $\mathfrak{K}$ eine p-te Wurzel aus a existiert, ohne Erweiterung des Körpers nach der entgegengesetzten Richtung fortsetzen. Entweder existiert für jede noch so große natürliche Zahl n eine p^n-te Wurzel aus a, die wir mit $a^{p^{-n}}$ bezeichnen, oder es gibt eine größte Zahl n derart, daß $a^{p^{-n}}$ noch existiert, aber keine p-te Wurzel mehr besitzt. Im ersten Fall erhalten wir eine nach zwei Richtungen hin sich ins Unendliche erstreckende Elementenfolge, im zweiten hat dieselbe ein Anfangselement. Die vollkommenen Körper sind dadurch charakterisiert, daß sie nur Folgen der ersten Art besitzen. Die Elemente einer Folge a^{p^n} sind entweder alle voneinander verschieden, oder sie wiederholen sich periodisch, in welchem Falle die Folge natürlich von der ersten Art ist. Es gilt hier der einfache Satz:

4. *Die durch ein Element a eines Körpers $\mathfrak{K}$ von der Charakteristik p bestimmte Elementenfolge a^{p^n} ist dann und nur dann periodisch, wenn das*

Element a absolut algebraisch ist. Die Anzahl der Elemente der Periode ist gleich dem absoluten Grade (= Grad in bezug auf den Primkörper) *von a, und die Elemente der Periode sind die sämtlichen Wurzeln einer und derselben irreduziblen Gleichung im Primkörper $\mathfrak{P}_p$.*

Ist nämlich die zu a gehörige Elementenfolge periodisch und besteht sie aus n verschiedenen Elementen, so ist jedes Element seiner p^n-ten Potenz gleich, also Lösung der Gleichung $x^{p^n}-x=0$, deren Koeffizienten dem in $\mathfrak{R}$ enthaltenen Primkörper $\mathfrak{P}_p$ angehören, mithin absolut algebraisch. Ist umgekehrt a ein absolut algebraisches Element von $\mathfrak{R}$ und

$$(2.) \qquad \varphi(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0$$

die irreduzible Gleichung des Primkörpers, welche durch a befriedigt wird, so ist

$$a^m+a_1a^{m-1}+\cdots+a_m=0.$$

Erhebt man diese Gleichung zur p-ten Potenz, und bedenkt man, daß jedes Element des Primkörpers seiner p-ten Potenz gleich ist, so erhält man

$$a^{pm}+a_1a^{p(m-1)}+\cdots+a_m=0,$$

d. h. die Gleichung (2.) wird auch durch a^p befriedigt. In gleicher Weise erkennt man, daß die Elemente $a^{p^2}, a^{p^3}, \ldots$ Lösungen der Gleichung (2.) sein müssen, daß es also höchstens m verschiedene unter ihnen gibt. Nehmen wir an, daß es n verschiedene gibt, also $a, a^p, a^{p^2}, \ldots a^{p^{n-1}}$ verschieden sind, während $a^{p^n}=a$ wird, so ist $\varphi(x)$ durch

$$(3.) \quad (x-a)(x-a^p)\cdots(x-a^{p^{n-1}})=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=\psi(x)$$

teilbar. Erhebt man zur p-ten Potenz und ersetzt man darauf x^p durch x (was statthaft, weil x^p in bezug auf $\mathfrak{R}$ transzendent ist), so erleiden die Faktoren der linken Seite von (3.) nur eine zyklische Permutation. Man erhält daher

$$\psi(x)=x^n+b_1^px^{n-1}+\cdots+b_n^p$$

und somit $b_1^p=b_1, \ldots b_n^p=b_n$. Nun wird aber die Gleichung $x^p=x$ durch die p Elemente des Primkörpers befriedigt, und da sie nicht mehr als

p Lösungen haben kann, so folgt, daß die Koeffizienten von $\psi(x)$ dem Primkörper angehören. Da aber $\varphi(x)$ durch $\psi(x)$ teilbar und im Primkörper irreduzibel ist, so muß $\varphi(x) = \psi(x)$ sein. Damit ist Satz 4. vollständig bewiesen.

Ist der Körper $\mathfrak{K}$ absolut algebraisch, so gehört jedes Element von $\mathfrak{K}$ einer periodischen Folge an, besitzt also eine p-te Wurzel. Wir erhalten so den folgenden Satz, von welchem 2. ein spezieller Fall ist:

5. *Jeder absolut algebraische Körper ist vollkommen.*

Wurzelelemente und Wurzelkörper. — Ist $\mathfrak{K}$ ein Körper von der Charakteristik p, $\mathfrak{L}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{K}$, so soll ein Element a von $\mathfrak{L}$ *Wurzelelement in bezug auf* $\mathfrak{K}$ heißen, wenn für hinlänglich großes n a^{p^n} zu $\mathfrak{K}$ gehört. Alsdann bezeichnen wir die kleinste Zahl $n \geqq 0$, für welche a^{p^n} Element von $\mathfrak{K}$ wird, als den *Exponenten von a in bezug auf* $\mathfrak{K}$. Ist derselbe gleich f, so ist, wie leicht zu sehen (s. S. 219), $x^{p^f} - a^{p^f} = 0$ die irreduzible Gleichung in $\mathfrak{K}$, welche durch a befriedigt wird. Den Körper $\mathfrak{L}$ nennen wir *Wurzelkörper in bezug auf* $\mathfrak{K}$, wenn alle seine Elemente Wurzelelemente sind. Zu den Wurzelelementen gehören alle Elemente von $\mathfrak{K}$ selbst, sie sind durch den Exponenten 0 charakterisiert. Sind a und b Wurzelelemente und übertreffen ihre Exponenten die natürliche Zahl f nicht, so sind a^{p^f}, b^{p^f} Elemente von $\mathfrak{K}$, und dasselbe gilt daher für $(a \pm b)^{p^f} = a^{p^f} \pm b^{p^f}$ wie für $(a \cdot b)^{p^f}$ und $\left(\frac{a}{b}\right)^{p^f}$. Die Elemente $a \pm b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ sind daher auch Wurzelelemente, und ihre Exponenten sind $\leqq f$. Daher bilden diejenigen in $\mathfrak{L}$ enthaltenen Wurzelelemente, deren Exponent die Zahl f nicht überschreitet, einen Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, und dasselbe gilt, wie hieraus sofort folgt, für die Gesamtheit aller in $\mathfrak{L}$ enthaltenen Wurzelelemente. Weiter ergibt sich, daß eine Erweiterung $\mathfrak{L}$, die durch Adjunktion eines (endlichen oder unendlichen) Systems $\mathfrak{S}$ von Wurzelelementen entsteht, einen Wurzelkörper darstellt. Denn der von den Wurzelelementen gebildete Körper ist, da er $\mathfrak{K}$ und das System $\mathfrak{S}$ enthält, mit dem Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{L}$ identisch. — Aus den gegebenen Definitionen folgt ferner sofort, daß wenn der Körper $\mathfrak{L}$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ liegt und $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}$ Wurzelkörper ist, $\mathfrak{M}$ auch in bezug auf $\mathfrak{K}$ einen Wurzelkörper darstellt. — Nehmen wir jetzt an, es sei der Erweiterungskörper $\mathfrak{L}$ selbst oder allgemeiner irgendein Körper $\mathfrak{T}$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ vollkommen, und bezeichnen wir

mit $\mathfrak{C}$ den Körper aller in $\mathfrak{L}$ enthaltenen Wurzelelemente (in bezug auf $\mathfrak{K}$). Ist dann a ein Element von $\mathfrak{C}$, f sein Exponent, so gehört a^{p^f} zu $\mathfrak{K}$, also auch zu $\mathfrak{T}$. Es muß aber schon a selbst zu $\mathfrak{T}$ gehören; denn bezeichneten wir andernfalls mit n die kleinste Zahl, für welche a^{p^n} zu $\mathfrak{T}$ gehört, so würde a^{p^n} innerhalb $\mathfrak{T}$ keine p-te Wurzel haben, während doch $\mathfrak{T}$ ein vollkommener Körper sein sollte. Es gehört also a zu $\mathfrak{T}$, und somit ist der Körper $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{T}$ enthalten. Andererseits ist $\mathfrak{C}$ selbst ein vollkommener Körper. Denn wenn a wieder ein Element von $\mathfrak{C}$ und f seinen Exponenten bezeichnet, so besitzt a als Element von $\mathfrak{T}$ innerhalb dieses vollkommenen Körpers eine p-te Wurzel $\sqrt[p]{a}=b$, und es wird $b^{p^{f+1}}=a^{p^f}$ Element von $\mathfrak{K}$. Das Element $\sqrt[p]{a}$ ist also Wurzelement, gehört mithin zu $\mathfrak{C}$. Somit enthält jeder Erweiterungskörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$, wenn er vollkommen ist, einen *kleinsten* derartigen Körper, und dieser wird von allen in $\mathfrak{L}$ enthaltenen Wurzelelementen gebildet. — Es sei nun $\mathfrak{C}$ ein kleinster vollkommener Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}$ (also ein Wurzelkörper), und es bezeichne $\mathfrak{K}_f$ ($f \geqq 0$) den Körper derjenigen Elemente von $\mathfrak{C}$, deren Exponent $\leqq f$ ist. Dann ist $\mathfrak{K}_0=\mathfrak{K}$. Ist a Element von $\mathfrak{K}_f$, so kann der Exponent von $\sqrt[p]{a}$ nicht $>f+1$ sein, d. h. $\sqrt[p]{a}$ gehört zu $\mathfrak{K}_{f+1}$; gehört $\sqrt[p]{a}$ zu $\mathfrak{K}_{f+1}$, so kann man umgekehrt schließen, daß a Element von $\mathfrak{K}_f$ ist. Es wird also $\mathfrak{K}_{f+1}^p=\mathfrak{K}_f$. Bezeichnet $\bar{\mathfrak{K}}$ einen Körper von demselben Typus wie $\mathfrak{K}$, π_0 eine isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$, $\bar{\mathfrak{C}}$ einen kleinsten vollkommenen Erweiterungskörper von $\bar{\mathfrak{K}}$, $\bar{\mathfrak{K}}_f$ den Körper derjenigen Elemente von $\bar{\mathfrak{C}}$, deren Exponent in bezug auf $\bar{\mathfrak{K}}$ $\leqq f$ ist, so haben wir einerseits zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_0$, andererseits zwischen $\bar{\mathfrak{K}}_1$ und $\bar{\mathfrak{K}}_0$ eine isomorphe Beziehung, wenn wir jedem Element von $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{K}}_1$ seine p-te Potenz zuordnen. Aus diesen beiden Isomorphismen ergibt sich in Verbindung mit π_0 eine isomorphe Beziehung π_1 zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\bar{\mathfrak{K}}_1$, welche π_0 umfaßt. In gleicher Weise gelangen wir zu einer π_1 umfassenden Beziehung π_2 zwischen $\mathfrak{K}_2$ und $\bar{\mathfrak{K}}_2$ u. s. f. Durch die Gesamtheit dieser Isomorphismen $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots$ wird ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{C}$ und $\bar{\mathfrak{C}}$ hergestellt. Hier können wir wieder $\mathfrak{K}$ mit $\bar{\mathfrak{K}}$ zusammenfallen lassen und voraussetzen, daß durch π_0 jedes Element von $\mathfrak{K}$ auf sich selbst bezogen wird. Dann ergibt sich:

6. *Jeder unvollkommene Körper läßt sich im wesentlichen nur auf eine Weise zu einem möglichst kleinen vollkommenen Körper erweitern; und es wird so jedem unvollkommenen Typus ein bestimmter vollkommener zugeordnet.*

§ 13.

Unvollkommene Körper: Algebraische Erweiterungen erster Art.

Es sei $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Körper. Eine irreduzible Funktion in $\mathfrak{k}$ heiße *von der ersten Art*, wenn sie nur einfache Nullstellen besitzt. Ein in bezug auf $\mathfrak{k}$ algebraisches Element γ heiße von der ersten Art, wenn die in $\mathfrak{k}$ irreduzible Funktion, welche die Nullstelle γ hat, von der ersten Art ist. Eine algebraische Erweiterung heiße von der ersten Art, wenn alle Elemente des Erweiterungskörpers von der ersten Art sind.

Bei vollkommenen Körpern, insbesondere also allen Körpern von der Charakteristik 0, gibt es nur Funktionen, algebraische Elemente und algebraische Erweiterungen erster Art.

Es habe der Körper $\mathfrak{k}$ die Charakteristik p, und es sei $g(x)$ eine irreduzible Funktion in $\mathfrak{k}$. Wir können dann eine ganze nicht negative Zahl f so bestimmen, daß $g(x)$ ganze rationale Funktion von x^{p^f}, aber nicht mehr von $x^{p^{f+1}}$ ist. $g(x)$ hat dann die Form

$$g(x) = x^{n p^f} + a_1 x^{(n-1)p^f} + \cdots + a_n,$$

und es kommt wenigstens ein Glied, dessen Exponent nicht durch p^{f+1} teilbar ist, wirklich vor. Wir bezeichnen die Zahl n als den *reduzierten Grad*, f (in Verallgemeinerung einer im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnung) als den *Exponenten* der irreduziblen Funktion $g(x)$ und übertragen diese Bezeichnung auch auf die Nullstellen der Funktion*).

Zwei spezielle Fälle sind besonders bemerkenswert. Hat nämlich erstens der reduzierte Grad seinen kleinsten Wert 1, so nimmt $g(x)$ die Form $x^{p^f} - \alpha$ an und hat lauter gleiche Nullstellen; die algebraischen Ele-

*) Die Bezeichnung „reduzierter Grad“ rechtfertigt sich dadurch, daß, wie mittels der folgenden Sätze leicht gezeigt werden kann, der reduzierte Grad eines Elementes in bezug auf $\mathfrak{k}$ gleich dem Grade ist, welchen das Element in bezug auf den kleinsten $\mathfrak{k}$ enthaltenden vollkommenen Körper hat.

mente vom reduzierten Grade 1 sind also die im vorigen Paragraphen betrachteten Wurzelelemente. Hat zweitens der Exponent f seinen kleinsten Wert 0, so ist $g(x)$ nicht mehr ganze rationale Funktion von x^p, die Ableitung $g'(x)$ verschwindet nicht, kann also mit $g(x)$ keinen gemeinsamen Faktor haben, somit hat die Funktion $g(x)$ lauter einfache Nullstellen, sie ist von erster Art. Dagegen ist im Falle $f>0$ $g(x)$ die p-te Potenz einer andern ganzen Funktion, hat also nur mehrfache Nullstellen. Mit dem Falle $f=0$ werden wir uns in diesem Paragraphen vorzugsweise beschäftigen.

Wir beweisen nun eine Reihe von Sätzen, die sich auf einen Körper $\mathfrak{K}$ von der Charakteristik p beziehen; ein Teil dieser Sätze ist nur dann von Bedeutung, wenn $\mathfrak{K}$ unvollkommen ist.

1. *Ist γ in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisches Element vom Exponenten f, $f>0$, so ist γ^p in bezug auf $\mathfrak{K}$ vom Exponenten $f-1$, und es ist* $[\mathfrak{K}(\gamma):\mathfrak{K}(\gamma^p)]=p$.

Denn wenn γ Nullstelle der irreduziblen Funktion

$$(1.) \qquad g(x)=x^{np^f}+a_1x^{(n-1)p^f}+\cdots+a_n$$

ist, so ist γ^p Nullstelle von

$$h(x)=x^{np^{f-1}}+a_1x^{(n-1)p^{f-1}}+\cdots+a_n.$$

$h(x)$ ist in $\mathfrak{K}$ irreduzibel, weil aus $h(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ folgen würde

$$g(x)=h(x^p)=\varphi(x^p)\cdot\psi(x^p),$$

während doch $g(x)$ irreduzibel ist. Somit ist $f-1$ der Exponent von γ^p, und da $[\gamma:\mathfrak{K}]=n\cdot p^f$, $[\gamma^p:\mathfrak{K}]=np^{f-1}$ ist, so folgt $[\mathfrak{K}(\gamma):\mathfrak{K}(\gamma^p)]=p$.

2. *Ist*

$$(2.) \qquad \varphi(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

eine irreduzible Funktion erster Art in $\mathfrak{K}$, so ist auch

$$(3.) \qquad \psi(x)=x^n+a_1^px^{n-1}+\cdots+a_n^p$$

(allgemeiner $x^n+a_1^{p^f}x^{n-1}+\cdots+a_n^{p^f}$) irreduzibel und von erster Art.

Beweis: Bezeichnet $h(x)$ einen zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Faktor von $\psi(x)$, dessen Grad größer als 0 ist, so ist $h(x^p)$ Faktor von $\psi(x^p)=(\varphi(x))^p$, also, weil $\varphi(x)$ irreduzibel ist, eine Potenz von $\varphi(x)$. Wir erhalten so:

(4.) $$h(x^p)=(\varphi(x))^r \quad (0<r\leqq p).$$

Nun hat aber der Voraussetzung gemäß $\varphi(x)$ nur einfache, $(\varphi(x))^r$ also nur r-fache Nullstellen; und da $h(x^p)$ die p-te Potenz einer ganzen Funktion (eines Erweiterungskörpers) ist, also jede Nullstelle wenigstens p-fach hat, so folgt aus (4.), daß $r=p$,

$$h(x^p)=(\varphi(x))^p=\psi(x^p),$$

somit

$$h(x)=\psi(x)$$

ist. $\psi(x)$ ist also irreduzibel. Da $\varphi(x)$ wenigstens eine Potenz von x, deren Exponent durch p nicht teilbar ist, wirklich enthält, so folgt aus (2.), (3.) dasselbe für $\psi(x)$. $\psi(x)$ ist also von der ersten Art.

3. *Ist*

(2.) $$\varphi(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

eine irreduzible Funktion erster Art in $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$ *ein Erweiterungskörper von* $\mathfrak{R}$, *welcher die p-ten Wurzeln aus den Koeffizienten von* $\varphi(x)$ *und eine Nullstelle* γ *von* $\varphi(x)$ *enthält, so enthält* $\mathfrak{L}$ *auch die p-te Wurzel aus* γ.

Beweis: $\mathfrak{L}$ enthält der Voraussetzung nach die beiden Funktionen

$$\chi(x)=x^n+\sqrt[p]{a_1}\,x^{n-1}+\cdots+\sqrt[p]{a_n}, \quad x^p-\gamma=(x-\sqrt[p]{\gamma})^p,$$

also auch ihren größten gemeinsamen Teiler $t(x)$. Da γ Nullstelle von $\varphi(x)$ ist, so ist $\sqrt[p]{\gamma}$ Nullstelle von $\varphi(x^p)=(\chi(x))^p$, also Nullstelle von $\chi(x)$, und zwar einfache Nullstelle, weil die Nullstellen von $\chi(x)$ die p-ten Wurzeln der Nullstellen von $\varphi(x)$, also wie diese voneinander verschieden sind. Da $\sqrt[p]{\gamma}$ die einzige Nullstelle von $x^p-\gamma$ ist, so folgt $t(x)=x-\sqrt[p]{\gamma}$, und somit ist $\sqrt[p]{\gamma}$ Element von $\mathfrak{L}$.

4. *Jede algebraische Erweiterung eines vollkommenen Körpers ist ein vollkommener Körper.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{R}$ ein vollkommener Körper von der Charakteristik p — denn für die Charakteristik 0 versteht sich der Satz von selbst —, $\mathfrak{L}$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{R}$, γ ein Element aus $\mathfrak{L}$, $\varphi(x)$ die irreduzible Funktion aus $\mathfrak{R}$ mit der Nullstelle γ. Da $\mathfrak{R}$ vollkommen ist,

ist $\varphi(x)$ von der ersten Art, und aus demselben Grunde enthält $\Re(\gamma)$, wie schon $\Re$, die p-ten Wurzeln aus den Koeffizienten von $\varphi(x)$, außerdem aber auch γ, mithin nach 3. auch $\sqrt[p]{\gamma}$. Da $\Re(\gamma)$ Teilkörper von Ω ist, so ist also die p-te Wurzel jedes Elementes γ von Ω in Ω enthalten, mithin Ω ein vollkommener Körper. — Die Voraussetzung des Satzes 4. ist erfüllt, wenn $\Re$ Primkörper, Ω also ein absolut algebraischer Körper ist, womit wieder der Satz § 12, 5. bewiesen ist.

5. *Ist γ in bezug auf $\Re$ algebraisch und von der ersten Art, so ist* $\Re(\gamma^p) = \Re(\gamma)$.

Denn wenn γ Nullstelle der irreduziblen Funktion $\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ in $\Re$ ist, so ist γ^p Nullstelle der Funktion $\psi(x) = x^n + a_1^p x^{n-1} + \cdots + a_n^p$, welche nach 2. ebenfalls irreduzibel ist. Es ist also $n = [\gamma : \Re] = [\gamma^p : \Re]$, woraus das Behauptete folgt. — Daß umgekehrt aus $\Re(\gamma^p) = \Re(\gamma)$ geschlossen werden kann, daß γ von der ersten Art ist, besagt bereits Satz 1.

6. *Ist das Element γ in bezug auf $\Re$ algebraisch und von der ersten Art, so ist $\Re(\gamma)$ eine algebraische Erweiterung erster Art.*

Beweis: Es sei α ein beliebiges Element von $\Re(\gamma)$; setzen wir dann

$$(5.) \qquad \begin{cases} [\Re(\alpha) : \Re] = m_1, & [\Re(\gamma) : \Re(\alpha)] = m_2, \\ [\Re(\alpha^p) : \Re] = n_1, & [\Re(\gamma) : \Re(\alpha^p)] = n_2, \end{cases}$$

so wird

$$(6.) \qquad m_1 \cdot m_2 = n_1 \cdot n_2 = [\Re(\gamma) : \Re],$$

und weil $\Re(\alpha^p)$ Teilkörper von $\Re(\alpha)$ ist,

$$(7.) \qquad m_1 \geqq n_1, \quad m_2 \leqq n_2.$$

Ist nun $\chi(x) = x^{m_2} + b_1 x^{m_2-1} + \cdots + b_{m_2}$ die irreduzible Funktion des Körpers $\Re(\alpha)$, welche γ zur Nullstelle hat, so ist γ^p Nullstelle von $x^{m_2} + b_1^p x^{m_2-1} + \cdots + b_{m_2}^p$, und die Koeffizienten dieser Funktion gehören, wie leicht zu sehen, dem Körper $\Re(\alpha^p)$ an. Mithin ist

$$n_2 = [\Re(\gamma) : \Re(\alpha^p)] = [\Re(\gamma^p) : \Re(\alpha^p)] \leqq m_2,$$

also wegen (7.), (6.) $m_2 = n_2$, $m_1 = n_1$. Die Elemente α und α^p sind also in bezug auf $\Re$ von demselben Grade. Daher ist $\Re(\alpha^p) = \Re(\alpha)$, also α ein Element erster Art, w. z. b. w.

7. *Jede endliche Erweiterung erster Art ist einfach.*

Denn wenn $\mathfrak{L}$ eine endliche Erweiterung erster Art von $\mathfrak{K}$ ist, so können wir $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ setzen, wo $\mathfrak{S}$ nur endlich viele Elemente enthält (§ 7, 6.), und da diese alle von der ersten Art sind, so ist $\mathfrak{L}$ nach § 11, 4. in bezug auf $\mathfrak{K}$ einfach.

8. *Ein Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$, welcher aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion eines Systems $\mathfrak{S}$ von algebraischen Elementen erster Art hervorgeht, ist eine Erweiterung erster Art.*

Ist nämlich $\mathfrak{S}$ ein endliches System, so folgt dies aus § 11, 4. und Satz 6. dieses Paragraphen; ist aber $\mathfrak{S}$ unendlich, so folgt dasselbe unter Hinzunahme von § 2, 3.

9. *Liegt der Körper $\mathfrak{L}$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ und ist $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}$ von der ersten Art, so ist $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ von der ersten Art.*

Beweis: Es sei δ ein beliebiges Element von $\mathfrak{M}$. Nach § 7, 9. ist δ in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch. Um 9. zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß δ von der ersten Art, also vom Exponenten 0 in bezug auf $\mathfrak{K}$ ist. Bezeichnen wir den in Rede stehenden Exponenten zunächst mit f, so ist nach 1. δ^{p^f} in bezug auf $\mathfrak{K}$ vom Exponenten 0. In bezug auf $\mathfrak{L}$ ist δ der Voraussetzung nach erster Art, woraus nach 5. $\mathfrak{L}(\delta)=\mathfrak{L}(\delta^p)=\mathfrak{L}(\delta^{p^2})=\cdots$, also $\mathfrak{L}(\delta)=\mathfrak{L}(\delta^{p^f})$ folgt. Den Körper $\mathfrak{L}(\delta^{p^f})$ erhält man aus $\mathfrak{K}$, indem man alle Elemente von $\mathfrak{L}$ sowie δ^{p^f} adjungiert. Da diese Elemente aber sämtlich in bezug auf $\mathfrak{K}$ von erster Art sind, so gilt dasselbe nach Satz 8. für alle Elemente des Körpers $\mathfrak{L}(\delta^{p^f})=\mathfrak{L}(\delta)$, also auch für δ, w. z. b. w.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Körper, $\mathfrak{L}$ eine endliche Erweiterung erster Art von $\mathfrak{K}$. Dann ist die Erweiterung einfach und irgendein primitives Element α von $\mathfrak{L}$ Nullstelle einer in $\mathfrak{K}$ irreduziblen Funktion $\varphi(x)$ von der ersten Art. Es kann sein, daß $\varphi(x)$ schon in $\mathfrak{L}$ vollständig zerfällt; dann setzen wir $\mathfrak{L}=\mathfrak{N}$. Andernfalls bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{L}$, welche gerade hinreicht, um $\varphi(x)$ vollständig zu zerlegen. Dann geht $\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{L}$, und da $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}(\alpha)$, auch aus $\mathfrak{K}$ allein durch Adjunktion von Nullstellen der Funktion $\varphi(x)$ hervor, ist also eine endliche Erweiterung erster Art von $\mathfrak{K}$ und überdies in bezug auf $\mathfrak{K}$ normal (§ 8, 6.). Ist daher j_1 ein primitives Element von $\mathfrak{N}$ (in bezug auf $\mathfrak{K}$), $g(x)$ die irreduzible Funktion aus $\mathfrak{K}$ mit der Nullstelle j_1, so hat man in $\mathfrak{N}$ eine Zerlegung

$$g(x)=(x-j_1)\cdot(x-j_2)\cdots(x-j_n).$$

Dabei sind die Elemente $j_1, j_2, \ldots j_n$ voneinander verschieden, und es wird

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{K}(j_1)=\mathfrak{K}(j_2)=\cdots=\mathfrak{K}(j_n); \quad [\mathfrak{N}:\mathfrak{K}]=n.$$

Da $j_1, j_2, \ldots j_n$ Nullstellen derselben irreduziblen Funktion aus $\mathfrak{K}$ sind, so erhält man eine isomorphe Beziehung π_k $(k=1, \ldots n)$ von $\mathfrak{N}$ in bezug auf sich selbst, bei welcher jedes Element von $\mathfrak{K}$ ungeändert bleibt, wenn man in jedem Element von $\mathfrak{N}$, das man sich in der Form

$$c_0+c_1 j_1+\cdots+c_{n-1} j_1^{n-1} \tag{8.}$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ geschrieben denkt, j_1 durch j_k ersetzt (§ 6). Das System dieser n Isomorphismen (die *Galois*sche Gruppe) sei mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Es sei nun $\mathfrak{M}$ irgend ein Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$, $[\mathfrak{M}:\mathfrak{K}]=m$, $\beta=\psi(j_1)$ ein primitives Element von $\mathfrak{M}$, in der Form (8.) dargestellt, $h(x)$ die irreduzible Funktion aus $\mathfrak{K}$ mit der Nullstelle β. Da die Isomorphismen π_k das Element 0 ungeändert lassen und $\beta=\psi(j_1)$ in $\psi(j_k)$ überführen, so folgt aus $0=h(\beta)=h(\psi(j_1))$, daß auch $h(\psi(j_k))=0$ wird. Die Funktion

$$f(x)=(x-\psi(j_1))\cdot(x-\psi(j_2))\cdots(x-\psi(j_n))$$

gehört zum Körper $\mathfrak{K}$, da ihre Koeffizienten in den Nullstellen j_k von $g(x)$ symmetrisch sind, und ihre Nullstellen sind nach dem vorangehenden sämtlich Nullstellen der irreduziblen Funktion $h(x)$. Daher kann $f(x)$ in $\mathfrak{K}$ keinen irreduziblen Faktor außer $h(x)$ haben, und es wird im Hinblick auf die Grade von $f(x)$ und $h(x)$

$$f(x)=h(x)^{\frac{n}{m}}.$$

Mithin sind unter den Elementen $\psi(j_k)$ genau $\frac{n}{m}$ gleich $\beta=\psi(j_1)$, es gibt also unter den Isomorphismen π_k genau $\frac{n}{m}$, welche das Element β und somit jedes Element von $\mathfrak{K}(\beta)=\mathfrak{M}$ ungeändert lassen. Es sei $\mathfrak{H}$ das System dieser $\frac{n}{m}$ Isomorphismen. — Ist $\mathfrak{M}'$ ein zweiter Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$, so gehört zu $\mathfrak{M}'$ ein System $\mathfrak{H}'$, bestehend aus allen denjenigen Isomorphismen

π_k, welche alle Elemente von $\mathfrak{M}'$ ungeändert lassen. Nehmen wir an, es sei $\mathfrak{H}'$ mit $\mathfrak{H}$ identisch. Ist dann δ ein Element von $\mathfrak{M}'$, so lassen die zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Isomorphismen alle Elemente von $\mathfrak{M}$ sowie δ, also auch alle Elemente des Körpers $\mathfrak{M}(\delta)$ ungeändert. Wird

$$[\mathfrak{M}(\delta):\mathfrak{M}]=\mu$$

gesetzt, so wird $[\mathfrak{M}(\delta):\mathfrak{k}]=m\cdot\mu$. Nach dem vorangehenden ist daher die Anzahl der Isomorphismen π_k, welche alle Elemente von $\mathfrak{M}(\delta)$ ungeändert lassen, gleich $\frac{n}{m\cdot\mu}$, und da zu ihnen alle $\frac{n}{m}$ Isomorphismen aus $\mathfrak{H}$ gehören, so muß $\mu=1$, $\mathfrak{M}(\delta)=\mathfrak{M}$, also δ Element von $\mathfrak{M}$ sein. Da δ ein beliebiges Element von $\mathfrak{M}'$ bezeichnete, so ist hiernach $\mathfrak{M}'$ Teil von $\mathfrak{M}$ und, da in gleicher Weise das Umgekehrte bewiesen werden kann, $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}'$. Da sonach zu verschiedenen Körpern $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{N}$ verschiedene Teilsysteme $\mathfrak{H}$ des Systems $\mathfrak{G}$ gehören, die Zahl der Teilsysteme von $\mathfrak{G}$ aber endlich ist, so liegen zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{N}$, also auch zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}$ nur endlich viele Körper. D. h.

10. *Zwischen einem Körper $\mathfrak{k}$ und einer endlichen Erweiterung $\mathfrak{L}$ erster Art liegen nur endlich viele Körper.*

Da ferner bei vollkommenen Körpern alle algebraischen Erweiterungen von der ersten Art sind, so ergibt sich:

11. *Zwischen einem vollkommenen Körper und einer endlichen Erweiterung desselben liegen nur endlich viele Körper.*

§ 14.

Unvollkommene Körper: Beliebige algebraische Erweiterungen, Satz der primitiven Elemente und Satz der Zwischenkörper.

Die in der Überschrift bezeichneten Sätze gelten zufolge § 11, 5. und § 13, 11. für jeden vollkommenen Körper. Es gibt aber gewisse unvollkommene Körper, in welchen diese Sätze auch noch bestehen. Zur näheren Untersuchung der hiermit zusammenhängenden Fragen müssen wir, nachdem wir in § 12 und § 13 zwei spezielle Arten algebraischer Erweiterungen, nämlich die Wurzelkörper und die Erweiterungen erster Art untersucht haben, jetzt beliebige algebraische Erweiterungen betrachten. Zunächst

zeigt es sich, daß jede solche Erweiterung sich in bestimmter Weise aus zwei speziellen zusammensetzt:

1. *Ist $\mathfrak{L}$ algebraische Erweiterung des unvollkommenen Körpers $\mathfrak{K}$, so gibt es zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ einen bestimmten Körper $\mathfrak{L}_0$ von der Beschaffenheit, daß $\mathfrak{L}_0$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ von der ersten Art, $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{L}_0$ Wurzelkörper ist. $\mathfrak{L}_0$ besteht aus allen Elementen von $\mathfrak{L}$, welche in bezug auf $\mathfrak{K}$ von erster Art sind.*

Bezeichnet nämlich $\mathfrak{L}_0$ das System aller Elemente erster Art aus $\mathfrak{L}$, so enthält der Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{L}_0)$ nach § 13, 8. nur Elemente erster Art, ist also mit $\mathfrak{L}_0$ identisch, und $\mathfrak{L}_0$ ist somit ein Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$. Ist ferner δ irgendein Element aus $\mathfrak{L}$, f sein Exponent in bezug auf $\mathfrak{K}$, so ist δ^{p^f} von erster Art, also Element von $\mathfrak{L}_0$, mithin δ Wurzelelement von $\mathfrak{L}_0$. Dieser Körper $\mathfrak{L}_0$ ist der einzige, welcher die unter 1. geforderten Eigenschaften besitzt. Denn besitzt $\mathfrak{L}_0'$ diese Eigenschaften, und ist das Element δ von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ von erster Art, so ist δ auch inbezug auf $\mathfrak{L}_0'$ von erster Art, und da δ zugleich Wurzelelement von $\mathfrak{L}_0'$ sein soll, so muß δ selbst dem Körper $\mathfrak{L}_0'$ angehören. $\mathfrak{L}_0'$ muß daher alle Elemente erster Art umfassen, also mit $\mathfrak{L}_0$ identisch sein.

2. *Ist $\mathfrak{L}$ algebraische Erweiterung des unvollkommenen Körpers $\mathfrak{K}$, f eine ganze Zahl $\geqq 0$, so ist das System $\mathfrak{L}_f$ derjenigen Elemente von $\mathfrak{L}$, deren Exponent $\leqq f$ ist, ein Körper (zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$).*

Dies ist zunächst für $\mathfrak{L}_0$ nach Satz 1. der Fall. Sodann ist die Forderung, daß der Exponent eines Elementes a von $\mathfrak{L}$ $\leqq f$ sein soll, gleichwertig mit der Forderung, daß a^{p^f} den Exponenten 0 haben, also Element von $\mathfrak{L}_0$ sein soll. Sind daher a und b Elemente aus $\mathfrak{L}_f$, so sind a^{p^f} und b^{p^f}, mithin auch Summe, Differenz, Produkt und Quotient von a^{p^f} und b^{p^f} Elemente von $\mathfrak{L}_0$. Diese Verbindungen sind aber die p^f-ten Potenzen von $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, $\frac{a}{b}$. Daher gehören diese vier Elemente wieder dem System $\mathfrak{L}_f$ an und dieses ist ein Körper.

3. *Adjungiert man einem unvollkommenen Körper $\mathfrak{K}$ ein System $\mathfrak{S}$ algebraischer Elemente, deren Exponenten die Zahl f nicht überschreiten, so sind die Exponenten aller Elemente von $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ $\leqq f$.*

Denn bezeichnet $\mathfrak{S}'$ das System aller Elemente von $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$, deren Exponenten $\leqq f$ sind, so ist $\mathfrak{S}'$ nach 2. ein Körper, und da in $\mathfrak{S}'$ alle Elemente von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ vorkommen, so wird $\mathfrak{S}'=\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$.

Exponent und reduzierter Grad einer endlichen Erweiterung. — Es sei $\mathfrak{L}$ eine endliche Erweiterung eines unvollkommenen Körpers $\mathfrak{K}$. Dann gibt es eine ganze Zahl $f \geqq 0$ derart, daß $\mathfrak{L}$ Elemente vom Exponenten f, aber keine von größerem Exponenten enthält. Wir nennen die Zahl f den *Exponenten von* $\mathfrak{L}$ (*in bezug auf* $\mathfrak{K}$). Ist ferner $\mathfrak{L}_0$ der Teilkörper von $\mathfrak{L}$, welcher von den Elementen erster Art gebildet wird, und ist $[\mathfrak{L}_0 : \mathfrak{K}] = n$, so nennen wir die Zahl n den *reduzierten Grad von* $\mathfrak{L}$ (*in bezug auf* $\mathfrak{K}$). — Ist nun δ ein Element aus $\mathfrak{L}$ vom Exponenten f, so ist von den Potenzen

$$\delta, \delta^p, \delta^{p^2}, \ldots \delta^{p^f}$$

erst die letzte vom Exponenten 0, also Element von $\mathfrak{L}_0$. Daher wird $[\mathfrak{L}_0(\delta) : \mathfrak{K}] = n \cdot p^f$, also $n \cdot p^f$ Teiler von $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]$. Ist ferner η ein beliebiges Element von $\mathfrak{L}$, n_1 sein reduzierter Grad, f_1 sein Exponent, so ist $f_1 \leqq f$, $\eta^{p^{f_1}}$ Element von $\mathfrak{L}_0$, n_1 gleich dem Grade von $\eta^{p^{f_1}}$, also ein Teiler von n. Da $n_1 \cdot p^{f_1}$ der Grad von η ist, so folgt:

4. *Ist* $\mathfrak{L}$ *eine endliche Erweiterung des unvollkommenen Körpers* $\mathfrak{K}$, n *ihr reduzierter Grad,* f *ihr Exponent, so ist der Grad von* $\mathfrak{L}$ (*in bezug auf* $\mathfrak{K}$) *ein Vielfaches, der Grad jedes Elementes von* $\mathfrak{L}$ *ein Teiler der Zahl* $n \cdot p^f$.

Ist $\mathfrak{L}$ eine einfache Erweiterung, so haben die primitiven Elemente denselben Grad wie $\mathfrak{L}$ selbst, dieser Grad muß also nach **4.** gleich $n \cdot p^f$ sein, und es stellt alsdann f den Exponenten, n den reduzierten Grad eines jeden primitiven Elementes dar.

Es bezeichne wie vorher $\mathfrak{L}$ eine endliche, nicht notwendig einfache Erweiterung des unvollkommenen Körpers $\mathfrak{K}$, und es mögen $\mathfrak{L}_0$, n, f ihre frühere Bedeutung beibehalten. In $\mathfrak{L}$ gibt es Elemente vom Exponenten f, ebenso Elemente vom reduzierten Grade n; denn der Körper $\mathfrak{L}_0$ ist von erster Art, besitzt also primitive Elemente. Der Grad eines solchen Elementes ist n, und da es erster Art ist, so ist n auch sein reduzierter Grad. Es fragt sich aber, ob man in $\mathfrak{L}$ stets ein Element finden kann, welches zugleich vom Exponenten f und vom reduzierten Grade n ist. Für die Erkenntnis der Struktur der endlichen Erweiterungen ist es von Wichtigkeit, zu zeigen, daß es stets solche Elemente gibt. Wir wollen also in Ergänzung von **4.** jetzt den Satz beweisen:

5. ***Ist Ω eine endliche Erweiterung des unvollkommenen Körpers $\mathfrak{K}$, n ihr reduzierter Grad, f ihr Exponent, so gibt es in Ω Elemente vom Grade $n \cdot p^f$.***

Wir bemerken zunächst, daß der Körper $\mathfrak{K}$, weil er unvollkommen ist, unendlich viele Elemente besitzt. In einem solchen Körper $\mathfrak{K}$ gilt aber der Satz, daß man in einer von 0 verschiedenen ganzen Funktion F von n Unbestimmten $t_0, t_1, \ldots t_{n-1}$ für diese solche Elemente aus $\mathfrak{K}$ setzen kann, daß das entstehende Element von $\mathfrak{K}$ ebenfalls $\neq 0$ ist. Man zeigt dies in bekannter Weise zunächst für $n=1$, wobei man sich darauf beruft, daß unendlich viele Werte zur Verfügung stehen, die Zahl der Nullstellen aber höchstens gleich dem Grade der Funktion ist; sodann allgemein durch den Schluß von n auf $n+1$. — Von dieser Tatsache machen wir jetzt Gebrauch. Indem wir die früheren Bezeichnungen wieder aufnehmen, wählen wir aus dem Körper Ω_0 ein primitives Element γ, aus dem Körper Ω ein Element δ vom Exponenten f (falls $f=0$, irgendein von 0 verschiedenes Element δ) aus und setzen $\delta^{p^f} = \eta$.

Von den Potenzen

$$\delta, \delta^p, \ldots \delta^{p^{f-1}} = \eta \tag{1.}$$

ist dann die letzte die einzige, welche Ω_0 angehört. Die Elemente

$$\varepsilon, \gamma, \gamma^2, \ldots \gamma^{n-1} \tag{2.}$$

bilden eine Basis von Ω_0, und da γ von erster Art, $\Omega_0 = \mathfrak{K}(\gamma) = \mathfrak{K}(\gamma^p) = \mathfrak{K}(\gamma^{p^2}) = \cdots = \mathfrak{K}(\gamma^{p^{f-1}})$, also γ^{p^f} ein primitives Element von Ω_0 und $\eta \neq 0$ ist, so bilden auch die Elemente

$$\eta, \quad \eta \cdot \gamma^{p^f}, \quad \eta \cdot \gamma^{2p^f}, \ldots \eta \cdot \gamma^{(n-1)p^f} \tag{3.}$$

eine Basis von Ω_0. Wir führen jetzt $2n$ Unbestimmte $t_0, \ldots t_{n-1}; u_0, \ldots u_{n-1}$ ein und bilden die beiden Linearformen:

$$\xi = t_0 + \gamma t_1 + \gamma^2 t_2 + \cdots + \gamma^{n-1} t_{n-1}, \tag{4.}$$

$$\zeta = \eta u_0 + \eta \gamma^{p^f} u_1 + \eta \gamma^{2p^f} u_2 + \cdots + \eta \gamma^{(n-1)p^f} u_{n-1}. \tag{5.}$$

Dann stellt ξ sowohl wie ζ jedes Element aus Ω_0 einmal dar, wenn man

für die t bzw. u alle Elemente aus $\mathfrak{R}$ setzt. Für jedes ganze nicht negative k stellt ζ^k eine ganze homogene Funktion der Unbestimmten u mit Koeffizienten aus Ω_0 dar. Drücken wir diese Koeffizienten durch die Basis (3.) aus und ordnen wir dann den Ausdruck nach den Elementen dieser Basis, so erhalten wir

$$(6.) \qquad \zeta^k = \eta A_{k0} + \eta\gamma^{p^f} A_{k1} + \cdots + \eta\gamma^{(n-1)p^f} A_{kn-1}.$$

Hierin sind die A ganze homogene Funktionen der u mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, und dasselbe gilt für die Determinante

$$|A_{kl}| \qquad (k, l = 0, \ldots n-1).$$

Setzen wir für die Unbestimmten u irgendwelche Elemente aus $\mathfrak{R}$, so wird ζ ein Element von Ω_0, $|A_{kl}|$ ein Element von $\mathfrak{R}$ und zwar nur dann gleich 0, wenn die Elemente

$$\varepsilon, \zeta, \zeta^2, \ldots \zeta^{n-1}$$

linear abhängig (in bezug auf $\mathfrak{R}$) werden. Da wir aber die u so wählen können, daß ζ primitiv wird, so ist $|A_{kl}|$, als Funktion der Unbestimmten u betrachtet, von 0 verschieden. Daher geht $|A_{kl}|$ in eine von 0 verschiedene Funktion Δ der Unbestimmten $t_0, \ldots t_{n-1}$ über, wenn man $u_0, \ldots u_{n-1}$ durch $t_0^{p^f}, \ldots t_{n-1}^{p^f}$ ersetzt. Nach dieser Substitution wird, wie aus (4.), (5.) ersichtlich,

$$(7.) \qquad \zeta = \eta\xi^{p^f}.$$

Setzen wir jetzt für $t_0, \ldots t_{n-1}$ solche Elemente aus $\mathfrak{R}$, daß $\Delta \neq 0$ wird (und nehmen wir im Falle $n=1$ $t_0 \neq 0$ an), so wird $\zeta = \eta\xi^{p^f}$ ein primitives, ξ ein von 0 verschiedenes Element von Ω_0. Das Element $\delta \cdot \xi$ aus Ω hat den Exponenten f; denn da von den Elementen (1.) nur das letzte dem Körper Ω_0 angehört, ξ aber Element von Ω_0 ist, so ist auch von den Potenzen

$$(8.) \qquad \delta\xi, \ \delta^p\xi^p, \ \ldots \ \delta^{p^f}\xi^{p^f} = \eta\xi^{p^f}$$

erst die letzte Element von Ω_0, also von der ersten Art. Ferner haben die Elemente (8.) alle denselben reduzierten Grad, und da $\eta\xi^{p^f}$ primitives

Element von $\mathfrak{L}_0$ ist, so ist der reduzierte Grad von $\delta\xi$ gleich n. Hiernach ist der Grad von $\delta\xi$ gleich $n \cdot p^f$, und damit ist 7. bewiesen.

Aus 5. und § 7, 5. folgt unmittelbar:

I. *Eine endliche Erweiterung* $\mathfrak{L}$ *eines unvollkommenen Körpers* $\mathfrak{K}$ *ist dann und nur dann einfach, wenn* $[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}] = n \cdot p^f$ *ist, wo* n *den reduzierten Grad,* f *den Exponenten* von $\mathfrak{L}$ *bezeichnet.*

Es sei wieder $\mathfrak{L}$ eine beliebige endliche Erweiterung des unvollkommenen Körpers $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ ein Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$; n und m mögen die reduzierten Grade der Körper $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ bezeichnen, f und g ihre Exponenten. Dann ist $g \leqq f$,

$$[\mathfrak{M}:\mathfrak{K}] \geqq m p^g. \tag{9.}$$

Es bezeichne ferner für jede ganze nicht negative Zahl r $\mathfrak{L}_r$ bezw. $\mathfrak{M}_r$ den Körper derjenigen Elemente von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{M}$, deren Exponenten $\leqq r$ sind, so daß

$$\mathfrak{L}_f = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{M}_g = \mathfrak{M},$$

$$[\mathfrak{L}_0:\mathfrak{K}] = n, \quad [\mathfrak{M}_0:\mathfrak{K}] = m$$

und jeder Körper $\mathfrak{M}_r$ Teilkörper von $\mathfrak{L}_r$ wird. $\mathfrak{L}_0$ ist in bezug auf $\mathfrak{K}$, also auch in bezug auf $\mathfrak{M}_0$ von der ersten Art, mithin einfach. Ein primitives Element γ von $\mathfrak{L}_0$ ist daher Nullstelle einer irreduziblen Funktion $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{M}_0$ vom Grade $\frac{n}{m}$ und von erster Art. Die Funktion $\varphi(x)$ ist aber auch im Körper $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_g$ irreduzibel. Hätte man nämlich in $\mathfrak{M}$ eine Zerlegung

$$\varphi(x) = \chi(x) \cdot \psi(x), \tag{10.}$$

und bezeichnete man mit $\bar{\varphi}(x), \bar{\chi}(x), \bar{\psi}(x)$ diejenigen Funktionen, welche aus $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$ dadurch hervorgehen, daß man jeden Koeffizienten durch seine p^g-te Potenz ersetzt, so würde aus (10.) die Gleichung

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{\chi}(x) \cdot \bar{\psi}(x) \tag{11.}$$

folgen. Da nun der Exponent jedes Elementes von $\mathfrak{M} \leqq g$, die p^g-te Potenz also in $\mathfrak{M}_0$ enthalten ist, so würde zufolge (11.) $\bar{\varphi}(x)$ im Körper

$\mathfrak{M}_0$ reduzibel sein. Dies aber widerspricht dem Satze § 13, 2. Somit ist $\varphi(x)$ auch in $\mathfrak{M}$ irreduzibel, mithin $[\gamma:\mathfrak{M}]=\frac{n}{m}$ und wegen (9.)

$$(12.) \qquad [\mathfrak{M}(\gamma):\mathfrak{K}]=\frac{n}{m}[\mathfrak{M}:\mathfrak{K}]\geqq n\cdot p^g.$$

Da $\mathfrak{M}$ vom Exponenten g, γ vom Exponenten 0 ist, so ist nach 3. $\mathfrak{M}(\gamma)$ vom Exponenten g, also Teil des Körpers $\mathfrak{L}_g$, welcher alle Elemente aus $\mathfrak{L}$ umfaßt, deren Exponenten $\leqq g$ sind. — Der Körper $\mathfrak{L}$ enthält Elemente vom Exponenten f, daher Elemente eines jeden Exponenten $\leqq f$ (§ 13, 1.). Mithin ist von den Körpern

$$\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \ldots \mathfrak{L}_f=\mathfrak{L}$$

jeder vorangehende nur ein Teil des folgenden.

Nehmen wir nun an, daß $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ einfach ist. Dann ist nach I $[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}]=n\cdot p^f$, $[\mathfrak{L}:\mathfrak{L}_0]=p^f$, daher

$$[\mathfrak{L}_{r+1}:\mathfrak{L}_r]=p, \qquad (r=0,\ldots f-1)$$

$$(13.) \qquad [\mathfrak{L}_g:\mathfrak{K}]=n\cdot p^g.$$

Da aber $\mathfrak{M}(\gamma)$ Teilkörper von $\mathfrak{L}_g$ ist, so folgt aus (12.), (13.):

$$\mathfrak{M}(\gamma)=\mathfrak{L}_g, \quad \frac{n}{m}[\mathfrak{M}:\mathfrak{K}]=n\cdot p^g, \quad [\mathfrak{M}:\mathfrak{K}]=m\cdot p^g.$$

Dies besagt aber nach I, daß $\mathfrak{M}$ eine einfache Erweiterung von $\mathfrak{K}$ ist. Es besteht also der Satz:

II. *Ist $\mathfrak{L}$ eine einfache algebraische*) Erweiterung von $\mathfrak{K}$, so ist auch jeder Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ einfach.*

Der Körper $\mathfrak{M}$ enthält nur solche Elemente von $\mathfrak{L}$, deren p^g-te Potenz zu $\mathfrak{M}_0$ gehört, er muß aber auch alle diese Elemente enthalten. Denn zunächst bilden diese Elemente einen Körper $\mathfrak{M}'$ (s. Satz 2.) zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$, nach II muß $\mathfrak{M}'$ ein primitives Element δ enthalten. Da alsdann δ^{p^g} zu $\mathfrak{M}_0$ gehört, so ist $[\mathfrak{M}':\mathfrak{K}]=[\delta:\mathfrak{M}_0]\cdot[\mathfrak{M}_0:\mathfrak{K}]\leqq p^g\cdot m$, also $\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}$. Jeder

---

*) Genau dasselbe gilt indessen auch für einfache transzendente Erweiterungen (Satz von *Lüroth*, s. § 24).

Körper $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}$ ist somit durch den in ihm enthaltenen Körper $\mathfrak{M}_0$ seiner Elemente erster Art und seinen Exponenten g eindeutig bestimmt. Nun ist $g \leqq f$, und für $\mathfrak{M}_0$ kommen, da $\mathfrak{M}_0$ zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}_0$ liegt und $\mathfrak{L}_0$ eine Erweiterung erster Art ist, nach § 13, 11. auch nur endlich viele Körper in Betracht, mithin kann es zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}$ nur endlich viele Körper geben.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung, daß die endliche Erweiterung $\mathfrak{L}$ einfach ist, fallen, nehmen aber dafür an, daß die Anzahl der Körper zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{L}$ endlich ist. Da die p-te Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{L}_r$ $(0 < r \leqq f)$ zu $\mathfrak{L}_{r-1}$ gehört, so kann $[\mathfrak{L}_r : \mathfrak{L}_{r-1}]$ nicht $> p$ sein, weil sonst im Widerspruch mit unserer Voraussetzung schon zwischen $\mathfrak{L}_{r-1}$ und $\mathfrak{L}_r$ unendlich viele Körper liegen würden (§ 11, 6.). Da andererseits $\mathfrak{L}_{r-1}$ nur ein Teil von $\mathfrak{L}_r$ ist, so wird $[\mathfrak{L}_r : \mathfrak{L}_{r-1}] = p$, also

$$[\mathfrak{L} : \mathfrak{k}] = [\mathfrak{L}_f : \mathfrak{L}_0] \cdot [\mathfrak{L}_0 : \mathfrak{k}] = n \cdot p^l,$$

was besagt, daß $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{k}$ einfach ist. Damit ist unter Berücksichtigung der früheren Ergebnisse (§ 11, 3., § 11, 5., § 13, 11.) bewiesen:

III. *Damit zwischen einem beliebigen Körper $\mathfrak{k}$ und einer Erweiterung $\mathfrak{L}$ desselben nur endlich viele Körper liegen, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{k}$ algebraisch und einfach ist.*

Wir beweisen zum Schluß noch:

IV. *Der Satz der primitiven Elemente und der Satz der Zwischenkörper* (§ 11) *gelten außer für vollkommene Körper noch für diejenigen unvollkommenen Körper $\mathfrak{k}$ von der Charakteristik p, welche in bezug auf $\mathfrak{k}^p$ endlich und vom Grade p sind. Für die anderen unvollkommenen Körper gelten sie nicht.*

Nehmen wir nämlich erstens an, daß die angegebenen Sätze für den unvollkommenen Körper $\mathfrak{k}$ von der Charakteristik p gelten, und bilden wir wie in § 12 den Erweiterungskörper $\mathfrak{L} = \mathfrak{k}^{p^{-1}}$, so daß $\mathfrak{L}^p = \mathfrak{k}$ wird. Ist dann a ein nicht zu $\mathfrak{k}$ gehöriges, b ein beliebiges Element von $\mathfrak{L}$, so ist $[\mathfrak{k}(a) : \mathfrak{k}] = p$, aber auch $[\mathfrak{k}(a, b) : \mathfrak{k}] = p$. Denn wäre $[\mathfrak{k}(a, b) : \mathfrak{k}] > p$, so würden, weil die p-ten Potenzen aller Elemente von $\mathfrak{k}(a, b)$ zu $\mathfrak{k}$ gehören, nach § 11, 6. unendlich viele Körper zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}(a, b)$ liegen, und die Erweiterung wäre nicht einfach. Da dies gegen unsere Annahme verstößt, so ist $[\mathfrak{k}(a, b) : \mathfrak{k}] = p = [\mathfrak{k}(a) : \mathfrak{k}]$, das Element b gehört also zu

$\mathfrak{K}(a)$, und da b ein beliebiges Element von $\mathfrak{L}$ war, so ist $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}(a)$, also $[\mathfrak{L}:\mathfrak{L}^p]=[\mathfrak{K}(a):\mathfrak{K}]=p$, und weil $\mathfrak{L}$ zu $\mathfrak{K}$ isomorph ist, auch $[\mathfrak{K}:\mathfrak{K}^p]=p$.

Nehmen wir zweitens an, daß $[\mathfrak{K}:\mathfrak{K}^p]=p$ ist, und bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}$ irgendeine endliche Erweiterung von $\mathfrak{K}$, mit f ihren Exponenten, mit n ihren reduzierten Grad. Hat dann $\mathfrak{L}_r$ die frühere Bedeutung und lassen wir jedem Element von $\mathfrak{L}_r$ in $\mathfrak{L}_r^p$ seine p-te Potenz entsprechen, so erhalten wir eine isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{L}_r$ und $\mathfrak{L}_r^p$, in welcher $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{K}^p$ isomorph abgebildet ist. Hieraus folgt, wie man sofort sieht,

$$[\mathfrak{L}_r:\mathfrak{K}]=[\mathfrak{L}_r^p:\mathfrak{K}^p]$$

und daraus

$$[\mathfrak{L}_r:\mathfrak{L}_r^p]\cdot[\mathfrak{L}_r:\mathfrak{K}]=[\mathfrak{L}_r:\mathfrak{L}_r^p]\cdot[\mathfrak{L}_r^p:\mathfrak{K}^p]=[\mathfrak{L}_r:\mathfrak{K}^p]=[\mathfrak{L}_r:\mathfrak{K}]\cdot[\mathfrak{K}:\mathfrak{K}^p]=p[\mathfrak{L}_r:\mathfrak{K}],$$

also

$$[\mathfrak{L}_r:\mathfrak{L}_r^p]=p. \tag{14.}$$

Es sei nun $0<r\leqq f$. Dann ist $\mathfrak{L}_{r-1}$ nur ein Teil von $\mathfrak{L}_r$; andererseits gehört die p-te Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{L}_r$ zu $\mathfrak{L}_{r-1}$, d. h. $\mathfrak{L}_{r-1}$ liegt zwischen $\mathfrak{L}_r^p$ und $\mathfrak{L}_r$, und aus (14.) folgt $\mathfrak{L}_{r-1}=\mathfrak{L}_r^p$ und somit

$$[\mathfrak{L}_r:\mathfrak{L}_{r-1}]=p.$$

Daraus folgt aber weiter

$$[\mathfrak{L}:\mathfrak{K}]=[\mathfrak{L}_f:\mathfrak{L}_0]\cdot[\mathfrak{L}_0:\mathfrak{K}]=np^f.$$

Diese Gleichung drückt aber aus, daß $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ einfach ist, w. z. b. w.

§ 15.

Endliche Körper.

Unter einem *endlichen Körper* verstehen wir einen Körper von endlich vielen Elementen. Ist $\mathfrak{K}$ ein endlicher Körper, so ist auch der in $\mathfrak{K}$ enthaltene Primkörper $\mathfrak{P}$ endlich, die Charakteristik von $\mathfrak{K}$ also eine Primzahl. Es muß ferner $\mathfrak{K}$ in bezug auf seinen Primkörper endlich sein. Hat andererseits $\mathfrak{K}$ die Charakteristik p, und ist $\mathfrak{K}$ in bezug auf seinen Primkörper $\mathfrak{P}_p=\mathfrak{P}$ endlich, $[\mathfrak{K}:\mathfrak{P}]=n$, und bilden die Elemente $a_1,\dots a_n$

eine Basis von $\mathfrak{K}$ in bezug auf $\mathfrak{P}$, so wird jedes Element von $\mathfrak{K}$ einmal in der Form

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n$$

dargestellt, wenn man für $c_1, \ldots c_n$ alle Elemente des Primkörpers setzt. $\mathfrak{K}$ besteht also aus p^n Elementen. Sonach ist die Anzahl der Elemente eines endlichen Körpers stets eine Primzahlpotenz. Ist wiederum eine beliebige Primzahlpotenz p^n gegeben und nehmen wir mit dem Primkörper $\mathfrak{P}_p$ eine Erweiterung vor, die gerade hinreicht, um die Funktion $x^{p^n} - x$ vollständig zu zerlegen, so ergibt sich folgendes: In dem Erweiterungskörper $\mathfrak{K}$ hat die Funktion $x^{p^n} - x$ p^n verschiedene Nullstellen, weil ihre Ableitung $p^n \varepsilon x^{p^n-1} - \varepsilon = -\varepsilon$, also zu $x^{p^n} - x$ relativ prim ist. Sind ferner a und b irgend zwei Nullstellen von $x^{p^n} - x$, so folgt aus $a^{p^n} = a$, $b^{p^n} = b$, daß $(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n} = a \pm b$, ebenso $(a \cdot b)^{p^n} = a \cdot b$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{p^n} = \frac{a}{b}$ wird, was besagt, daß die Nullstellen von $x^{p^n} - x$ einen Körper von p^n Elementen bilden. Ist andererseits $\mathfrak{K}$ ein endlicher Körper von p^n Elementen, so ist p seine Charakteristik, n sein Grad in bezug auf den Primkörper. $\mathfrak{K}$ ist absolut algebraisch, und ebenso ist jedes Element a von $\mathfrak{K}$ absolut algebraisch, sein absoluter Grad m ein Divisor von n. Nach § 12, 4. besteht die Folge

$$a, a^p, a^{p^2}, \ldots$$

aus einer Periode von m verschiedenen Elementen; es ist daher für jeden durch m teilbaren Exponenten f $a^{p^f} = a$, also auch $a^{p^n} = a$. Somit sind die p^n Elemente von $\mathfrak{K}$ die Nullstellen der Funktion $x^{p^n} - x$, und $\mathfrak{K}$ stellt eine Erweiterung des Primkörpers dar, welche gerade hinreicht, die Funktion $x^{p^n} - x$ vollständig zu zerlegen. Da aber alle Erweiterungen eines Körpers, welche zur vollständigen Zerfällung einer gegebenen Funktion gerade hinreichen, äquivalent sind, so sind alle Körper von p^n Elementen isomorph. Somit hat sich ergeben:

1. *Die Zahl der Elemente eines endlichen Körpers ist eine Primzahlpotenz, und jede Primzahlpotenz p^n stellt die Anzahl der Elemente für einen und nur*) einen Körpertypus dar; p ist die Charakteristik, n der absolute Grad desselben.*

*) Dies wurde wohl zuerst von *Moore* ausgesprochen und bewiesen (Math. Papers read at the intern. math. congress, Chicago 1893, (New York 1896), pag. 210 ff.).

Wir wollen diesen Typus mit $\mathfrak{E}_{p,n}$ bezeichnen.

Damit in einem Körper $\mathfrak{K}$ von der Charakteristik p ein Körper $\mathfrak{E}_{p,n}$ enthalten sei, ist nach dem Vorangehenden notwendig und hinreichend, daß die Funktion $x^{p^n}-x$ in $\mathfrak{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Die p^n Nullstellen von $x^{p^n}-x$ bilden dann den Körper. Hieraus folgt zunächst:

2. *Ein Körper kann nicht mehr als einen Teilkörper vom Typus* $\mathfrak{E}_{p,n}$ (bei gegebenem n) *enthalten.*

Ist d ein Teiler von n, so ist p^d-1 Teiler von p^n-1, daher $x^{p^d}-x = x(x^{p^d-1}-\varepsilon)$ Teiler von $x^{p^n}-x = x(x^{p^n-1}-\varepsilon)$. Enthält daher der Körper $\mathfrak{K}$ einen Körper $\mathfrak{E}_{p,n}$, so zerfällt in $\mathfrak{K}$ die Funktion $x^{p^n}-x$, also auch die Funktion $x^{p^d}-x$ in Linearfaktoren. Es gilt also der Satz:

3. *Enthält ein Körper* $\mathfrak{K}$ *einen Körper* $\mathfrak{E}_{p,n}$, *so enthält er auch Körper aller Typen* $\mathfrak{E}_{p,d}$, *wo* d *einen Teiler von* n *bezeichnet.*

Eine weitere Folge von 2. und 3. ist:

4. *Ein Körper* $\mathfrak{E}_{p,n}$ *hat so viele Teilkörper, als die Zahl* n *Teiler hat, jeder Teiler von* n *bezeichnet den Grad eines Teilkörpers;*

ferner:

5. *Enthält der Körper* $\mathfrak{K}$ *einen Körper* $\mathfrak{E}_{p,n}$, *so besteht dieser aus allen denjenigen absolut algebraischen Elementen von* $\mathfrak{K}$, *deren Grad Teiler von* n *ist.*

Denn zunächst ist jedes Element von $\mathfrak{E}_{p,n}$ absolut algebraisch und sein Grad Teiler von n. Ist andererseits a ein absolut algebraisches Element von $\mathfrak{K}$ und sein Grad d Teiler von n, so ist der in $\mathfrak{K}$ enthaltene Körper $\mathfrak{P}_p(a)$ vom Typus $\mathfrak{E}_{p,d}$ und, da $\mathfrak{K}$ nur einen Körper dieses Typus enthält, mit demjenigen identisch, der auch in $\mathfrak{E}_{p,n}$ enthalten ist. Also ist a Element von $\mathfrak{E}_{p,n}$.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Körper von der Charakteristik p; a und b seien absolut algebraische Elemente von $\mathfrak{K}$, m und n ihre Grade, m relativ prim zu n, t der Grad von $a+b$. Dann ist (§ 12, 4.)

$$a+b=(a+b)^{p^{tn}}=a^{p^{tn}}+b^{p^{tn}}=a^{p^{tn}}+b,$$

also

$$a=a^{p^{tn}},$$

woraus folgt, daß m in tn, also auch in t aufgeht. Ebenso zeigt man,

daß n in t aufgeht, daß mithin t durch $m \cdot n$ teilbar ist. Andererseits ist

$$(a+b)^{p^{mn}} = a^{p^{mn}} + b^{p^{mn}} = a+b,$$

also mn durch t teilbar, mithin $t = mn$. Dieses Resultat läßt sich sofort auf Summen von mehr als zwei Elementen ausdehnen, und es ergibt sich so:

6. *Sind $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ absolut algebraische Elemente eines Körpers von Primzahlcharakteristik, und sind ihre Grade untereinander relativ prim, so ist der Grad von $a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu$ gleich dem Produkt dieser Grade.*

Hieraus ziehen wir einige einfache Folgerungen: Stellt

$$n = q_1^{r_1} \cdot q_2^{r_2} \cdots q_\nu^{r_\nu} \tag{1.}$$

die Zerlegung der natürlichen Zahl n in Potenzen verschiedener Primzahlen dar, so enthält ein Körper vom Typus $\mathfrak{E}_{p,n}$ einen Teilkörper $\mathfrak{A}$ vom absoluten Grade $q_i^{r_i}$ $(i = 1, \ldots \nu)$, dieser einen Teilkörper $\mathfrak{B}$ vom Grade $q_i^{r_i - 1}$. Ist a_i ein in $\mathfrak{A}$ aber nicht in $\mathfrak{B}$ enthaltenes Element, so ist der Grad von a_i Teiler von $q_i^{r_i}$ aber nach 5. nicht Teiler von $q_i^{r_i - 1}$, mithin gleich $q_i^{r_i}$. Wir können also dem Körper $\mathfrak{E}_{p,n}$ ν Elemente $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ von den Graden $q_1^{r_1}, q_2^{r_2}, \ldots q_\nu^{r_\nu}$ entnehmen. Das Element $a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu$ ist dann vom Grade n, also primitiv, und somit ist bewiesen:

7. *Jeder endliche Körper ist in bezug auf seinen Primkörper einfach, und es gibt also in diesem irreduzible Funktionen eines jeden Grades n.*

Es enthalte der Körper $\mathfrak{K}$ von der Charakteristik p die Körper $\mathfrak{E}_{p,n_1}$ und $\mathfrak{E}_{p,n_2}$, es sei n das kleinste gemeinsame Vielfache von n_1 und n_2, und Gleichung (1.) stelle die Zerlegung von n in Primzahlpotenzen dar. Dann geht $q_i^{r_i}$ $(i = 1, \ldots \nu)$ wenigstens in einer der Zahlen n_1, n_2 auf, $\mathfrak{K}$ enthält daher einen endlichen Körper vom Grade $q_i^{r_i}$, also auch ein Element a_i dieses Grades. Ermitteln wir für $i = 1, \ldots \nu$ je ein solches Element, so ist $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu$ ein Element, $\mathfrak{P}_p(a)$ ein Körper vom absoluten Grade n. Also:

8. *Enthält der Körper $\mathfrak{K}$ endliche Körper der (absoluten) Grade n_1, n_2 und ist n das kleinste gemeinsame Vielfache von n_1 und n_2, so enthält $\mathfrak{K}$ auch einen Körper vom Grade n.*

Auf Grund des Satzes 7. können wir die Lücke ausfüllen, welche beim Beweise von § 11, 4. geblieben war, indem der Fall eines endlichen Körpers ausgeschlossen wurde. Wenn wir nämlich einen endlichen Körper $\mathfrak{K}$

durch Adjunktion von endlich vielen algebraischen Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zu einem Körper $\mathfrak{L}$ erweitern, so ist $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$, also auch in bezug auf den Primkörper endlich, mithin ein endlicher Körper. Nach 7. gibt es in $\mathfrak{L}$ Elemente ξ derart, daß $\mathfrak{P}_p(\xi) = \mathfrak{L}$, somit auch $\mathfrak{K}(\xi) = \mathfrak{L}$ wird. $\mathfrak{L}$ ist also in bezug auf $\mathfrak{K}$ einfach, und da $\mathfrak{K}$ ein vollkommener Körper ist, so ist ξ Nullstelle einer irreduziblen Funktion von $\mathfrak{K}$ mit einfachen Nullstellen. Also:

9. *Der Satz* § 11, 4. *gilt auch für endliche Körper.*

Jedes Element des Körpers $\mathfrak{E}_{p,n}$ genügt im Primkörper $\mathfrak{P}_p = \mathfrak{E}_{p,1}$ einer irreduziblen Gleichung $g(x) = 0$, deren Grad ein Teiler von n ist. Zerlegt man daher die Funktion $x^{p^n} - x$, deren Nullstellen die sämtlichen Elemente von $\mathfrak{E}_{p,n}$ sind, in $\mathfrak{P}_p$ in irreduzible Faktoren, so sind diese alle verschieden, und ihre Grade sind Teiler von n. Es muß aber auch umgekehrt jede irreduzible Funktion $g(x)$ aus $\mathfrak{P}_p$, deren Grad d in n aufgeht, unter den Faktoren von $x^{p^n} - x$ enthalten sein. Denn bezeichnet $\mathfrak{L}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{P}_p$, welche zur Zerfällung von $g(x)$ gerade hinreicht, und ist a eine Nullstelle von $g(x)$ in $\mathfrak{L}$, so ist $\mathfrak{P}_p(a)$ ein Körper $\mathfrak{E}_{p,d}$ und enthält nach 5. alle Elemente von $\mathfrak{L}$, deren Grad Teiler von d ist, also auch alle Nullstellen von $g(x)$. Daraus folgt $\mathfrak{P}_p(a) = \mathfrak{L}$, und die Funktion $x^{p^d} - x$, welche alle Elemente von $\mathfrak{P}_p(a) = \mathfrak{E}_{p,d} = \mathfrak{L}$ zu Nullstellen hat, muß durch $g(x)$ teilbar sein. $g(x)$ geht daher auch in $x^{p^n} - x$ auf, und wir erhalten den Satz:

10. *Die Funktion $x^{p^n} - x$ stellt das Produkt aller irreduziblen Funktionen des Primkörpers $\mathfrak{P}_p$ dar, deren Grad Teiler von n ist.*

§ 16.

Die absolut algebraischen Körper von Primzahlcharakteristik.

Es sei p eine beliebige, aber für die folgenden Betrachtungen ein für allemal fest gewählte Primzahl. — Wir wollen nun die *absolut algebraischen Körper von der Charakteristik p* betrachten. Zu diesen gehören alle *endlichen* Körper von der Charakteristik p, welche dadurch gekennzeichnet sind, daß sie in bezug auf den Primkörper $\mathfrak{P}$ endlich sind. In dem umfassenderen Gebiete aller absolut algebraischen Körper von der Charakteristik p finden sich nun in der Hauptsache dieselben Gesetze wie in dem engeren Gebiete der endlichen Körper. Um dies deutlicher hervortreten

zu lassen, bezeichnen wir die sämtlichen Primzahlen in ihrer natürlichen Folge mit $q_1, q_2, q_3, \ldots$, so daß

$$q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, \ldots$$

wird. Dann wird jede natürliche Zahl auf eine Weise in der Form

$$(1). \qquad \prod_{i=1}^{\infty} q_i^{\varkappa_i}$$

dargestellt, wo die Exponenten $\varkappa_i$ ganze nicht negative Zahlen sind, von denen nur eine endliche Anzahl von 0 verschieden ist. Wir wollen jetzt allgemeiner alle (symbolischen) Ausdrücke von der Form (1.) betrachten, in denen für jeden Exponenten $\varkappa_i$ nach Belieben 0 oder eine natürliche Zahl oder auch das Zeichen ∞ gesetzt ist, und setzen für diese Ausdrücke, die wir *G-Zahlen* nennen (G=Grad), und welche die natürlichen Zahlen mit umfassen, in Übereinstimmung mit den bei natürlichen Zahlen geltenden Gesetzen folgendes fest: *Zwei G-Zahlen*

$$m = \Pi q_i^{\varkappa_i}, \quad n = \Pi q_i^{\lambda_i}$$

heißen dann und nur dann gleich, wenn für jedes i $\varkappa_i = \lambda_i$ *ist.* m *heißt teilbar durch* n, *ein Vielfaches von* n *u. s. f., wenn für jedes* i $\lambda_i \leqq \varkappa_i$ *ist.* Dabei gilt ∞ als größer als jeder andere Exponent. Ist m durch n teilbar, so bilden wir auch den Quotienten, indem wir festsetzen, daß

$$\frac{m}{n} = \Pi q_i^{\varkappa_i - \lambda_i}$$

sein soll, wobei $\varkappa_i - \lambda_i$ gleich 0 zu setzen ist, wenn $m = \infty$, $n = \infty$ ist, gleich ∞, wenn $\varkappa_i = \infty$, λ_i aber endlich ist. Dann ergibt sich sofort: Alle G-Zahlen sind durch 1 teilbar, und alle gehen in derjenigen G-Zahl auf, deren sämtliche Exponenten $\varkappa_i$ gleich ∞ sind. Hat man irgendein System von endlich oder unendlich vielen G-Zahlen, so besitzen diese stets einen *größten gemeinsamen Teiler* t, in welchem alle gemeinsamen Teiler aufgehen, und ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches* v, welches in allen gemeinsamen Vielfachen aufgeht. Der Exponent von q_i in t ist gleich dem kleinsten Exponenten, welchen q_i in den gegebenen G-Zahlen hat, der Exponent von q_i in v gleich dem größten dieser Exponenten oder,

falls ein solcher nicht existiert — falls nämlich zwar kein Exponent von q_i gleich ∞ ist, aber jede endliche Zahl von gewissen dieser Exponenten überschritten wird —, gleich ∞.

Ist m irgendeine G-Zahl, so bilden die natürlichen Zahlen, welche in m aufgehen, ein System $\mathfrak{S}$ von folgenden Eigenschaften:

1) *Ist n eine Zahl aus $\mathfrak{S}$, so gehört auch jeder Teiler von n zu $\mathfrak{S}$.*

2) *Sind n_1, n_2 Zahlen aus $\mathfrak{S}$, so ist auch ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches Zahl aus $\mathfrak{S}$.*

Die Zahl m ist dann in jedem Falle das kleinste gemeinsame Vielfache aller Zahlen aus $\mathfrak{S}$, und also ihrerseits durch das System $\mathfrak{S}$ völlig bestimmt. Hat man umgekehrt irgendein System $\mathfrak{S}$ von natürlichen Zahlen, welches die Eigenschaften 1) und 2) besitzt und ist m das kleinste gemeinsame Vielfache aller Zahlen aus $\mathfrak{S}$, so besteht $\mathfrak{S}$ aus den sämtlichen natürlichen Zahlen, welche in m aufgehen.

Es sei nunmehr $\mathfrak{K}$ irgendein absolut algebraischer Körper von der Charakteristik p. Die Grade der in $\mathfrak{K}$ enthaltenen endlichen Körper bilden dann ein System $\mathfrak{S}$ von natürlichen Zahlen, welches zufolge § 15, 3. und 8. die Eigenschaften 1) und 2) besitzt. Es sei m das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen aus $\mathfrak{S}$. Ist m eine natürliche Zahl, so ist $\mathfrak{K}$ ein endlicher Körper vom Grade m. Ist umgekehrt $\mathfrak{K}$ ein endlicher Körper, so stellt m den Grad dieses Körpers dar. Wir wollen nun aber auch in den Fällen, wo $\mathfrak{K}$ nicht endlich und demgemäß m keine natürliche Zahl ist, m als den (absoluten) Grad von $\mathfrak{K}$ bezeichnen. Dann gilt also:

1. *Jeder absolut algebraische Körper von der Charakteristik p hat einen bestimmten Grad, welcher eine G-Zahl ist.*

Es gelten ferner, wie wir noch zu zeigen haben, die folgenden Sätze:

2. *Es gibt einen absolut algebraischen Körper der Charakteristik p, dessen Grad gleich einer beliebig vorgeschriebenen G-Zahl ist.*

3. *Alle absolut algebraischen Körper derselben Charakteristik p und desselben Grades sind isomorph.*

Um zu einem Beweise von 2. zu gelangen, nehmen wir mit den ganzen ganzzahligen mod. p reduzierten Funktionen eine Numerierung vor. Unter der *Nummer ν* einer solchen Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{2.}$$

in welcher also die Koeffizienten Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ sind, verstehen wir die Zahl $f(p)$, so daß

$$\nu = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{3.}$$

wird. Dann hat nicht nur jede der hier betrachteten Funktionen eine Nummer $\geqq 0$, sondern es stellt auch jede ganze Zahl $\geqq 0$ die Nummer einer und nur einer dieser Funktionen dar. Denn die Gleichung (3.) ist ja nichts anderes als die Darstellung der Zahl ν im System mit der Grundzahl p. Diese Numerierung übertragen wir sodann auf die ganzen Funktionen eines Primkörpers $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_p$, also auf die sämtlichen Elemente von $\mathfrak{P}[x]$, die ja auch in der Form (2.) eindeutig dargestellt werden. Dabei hat, wie sofort zu sehen, von zwei Funktionen verschiedenen Grades diejenige von kleinerem Grade auch die kleinere Nummer, und unter den Funktionen gleichen Grades haben diejenigen, bei denen der Koeffizient der höchsten Potenz die Einheit ist, kleinere Nummern als die andern.

Ist n irgendeine natürliche Zahl, so gibt es, wie wir wissen, in $\mathfrak{P}$ irreduzible Funktionen vom Grade n. Unter diesen sei diejenige mit kleinster Nummer durch $\varphi_n(x)$ bezeichnet. Ist d ein Divisor von n, so gibt es in einem endlichen Erweiterungskörper $\mathfrak{E}_{p,n}$ n Elemente $j, j_1, \ldots j_{n-1}$, welche die Gleichung $\varphi_n(x) = 0$, und d Elemente, welche die Gleichung $\varphi_d(x) = 0$ befriedigen. Die letzteren können als ganze Funktionen von j, deren Grad $< n$ ist, und deren Koeffizienten zu $\mathfrak{P}$ gehören, dargestellt werden. In der Sprache der Kongruenzen können wir dies so ausdrücken: Es gibt in $\mathfrak{P}$ d Funktionen $\chi_1(x), \ldots \chi_d(x)$, deren Grad $< n$ ist, und für welche

$$\varphi_d(\chi_i(x)) \equiv 0 \pmod{\varphi_n(x)} \qquad (i = 1, \ldots d)$$

wird. Unter diesen bezeichnen wir diejenige von kleinster Nummer mit $\psi_{d,n}(x)$. Dann können wir sagen: Wenn in einem Erweiterungskörper von $\mathfrak{P}$ das Element j Nullstelle von $\varphi_n(x)$ ist, so ist $\psi_{d,n}(j)$ Nullstelle von $\varphi_d(x)$. $\varphi_n(x)$ und $\psi_{d,n}(x)$ sind für jede natürliche Zahl n und jeden Teiler d von n wohldefinierte Funktionen aus $\mathfrak{P}$, welche sich für jedes gegebene n, d leicht berechnen lassen. Es sei noch darauf hingewiesen, daß $\varphi_1(x) = x$, $\psi_{1,n}(x) = 0$ wird, während $\psi_{d,n}(x)$, sobald $d > 1$ ist, wenigstens vom ersten Grade ist. $\psi_{n,n}(x)$ wird gleich x für $n > 1$.

Es sei nunmehr irgendeine G-Zahl

$$m = \Pi q_i^{r_i}$$

gegeben. Bezeichnen wir für jede natürliche Zahl n mit r_n den größten gemeinsamen Teiler von $n!$ und m, so bilden

$$r_1, r_2, \ldots \tag{4.}$$

eine Folge natürlicher Zahlen, deren jede in den folgenden aufgeht. Eine natürliche Zahl n, die in m aufgeht, geht, weil in $n!$, auch in r_n auf. Eine Zahl, die nicht in m aufgeht, kann aber auch in keiner der Zahlen (4.) aufgehen. Mithin: Das System $\mathfrak{S}$ der natürlichen Teiler von m ist identisch mit dem System der in Zahlen der Folge (4.) aufgehenden Zahlen. Sehen wir von dem schon erledigten Fall, daß m endlich d. h. eine natürliche Zahl ist, ab, so werden die Zahlen (4.) über alle Grenzen wachsen. Durch Fortlassen von Elementen aus (4.) können wir bewirken, daß eine unendliche Zahlenfolge zurückbleibt, in welcher schon das erste Element >1 ist und keine zwei einander gleich sind. Diese Zahlenfolge hat noch immer die Eigenschaften, auf die wir uns allein stützen, daß nämlich jede Zahl in den folgenden aufgeht, und daß die und nur die natürlichen Zahlen in Zahlen der Folge aufgehen, welche Divisoren von m sind.

Wir führen jetzt ein System von Elementen

$$j_1, j_2, \ldots \text{ in inf.}$$

ein, indem wir verfügen, daß j_n Nullstelle der Funktion $\varphi_{r_n}(x)$ — für die wir auch $\overline{\varphi}_n(x)$ schreiben — sein soll. Dann stellt $\mathfrak{P}(j_n) = \mathfrak{K}_n$ einen endlichen Körper vom Grade r_n dar. Wir erhalten so ein System von Körpern

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots,$$

die zunächst nichts miteinander zu tun haben. Ersetzen wir das Funktionszeichen $\psi_{r_n, r_{n+1}}$ durch $\overline{\psi}_{n, n+1}$, so stellt $\overline{\psi}_{n, n+1}(j_{n+1})$ eine Nullstelle von $\overline{\varphi}_n(x)$ dar, und man hat daher eine eindeutig bestimmte isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{K}_n = \mathfrak{P}(j_n)$ und dem in $\mathfrak{K}_{n+1} = \mathfrak{P}(j_{n+1})$ enthaltenen Körper $\mathfrak{P}(\overline{\psi}_{n, n+1}(j_{n+1}))$, in welcher dem Element j_n das Element $\overline{\psi}_{n, n+1}(j_{n+1})$

entspricht. Daher dürfen wir, ohne daß dadurch die bisher zwischen den Elementen bestehenden Beziehungen ihre Gültigkeit verlieren, festsetzen, daß $j_n = \overline{\psi}_{n,n+1}(j_{n+1})$ sein soll. Durch diese Festsetzung, die für jedes n gelten soll, wird aber jeder Körper der Reihe

$$(5.) \qquad \mathfrak{K}_0 = \mathfrak{P},\ \mathfrak{K}_1,\ \mathfrak{K}_2,\ \ldots$$

Teil des folgenden. Die Gesamtheit aller Elemente, die in diesen Körpern auftreten, stellt einen Körper $\mathfrak{L}$ dar, und wir können leicht zeigen, daß dieser Körper die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zunächst ist klar, daß $\mathfrak{L}$ ein absolut algebraischer Körper von der Charakteristik p ist, weil dies von allen Körpern aus (5.) gilt. Ist ferner n eine natürliche Zahl, die in m aufgeht, so geht n in r_n auf, und der Körper $\mathfrak{K}_n$, dessen Grad r_n ist, besitzt einen Teilkörper vom Grade n, welcher auch Teilkörper von $\mathfrak{L}$ ist. Geht aber n nicht in m, also auch in keiner Zahl $r_\varkappa$ auf, so enthält keiner der Körper $\mathfrak{K}_\varkappa$ ein Element vom Grade n; also enthält auch $\mathfrak{L}$ kein solches Element, also auch keinen Körper vom Grade n. Daher ist m der Grad von $\mathfrak{L}$.

Wir kommen nun zum Beweise von 3. und nehmen an, daß neben dem eben konstruierten Körper $\mathfrak{L}$ ein zweiter $\mathfrak{L}'$ gegeben sei, welcher wie $\mathfrak{L}$ absolut algebraisch ist, die Charakteristik p und den Grad m hat. Dann ist zu zeigen, daß $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ isomorph sind. — Bei diesem Beweise dürfen wir, wie leicht zu sehen, voraussetzen, daß der Primkörper von $\mathfrak{L}'$ mit dem von $\mathfrak{L}$ identisch ist. Da jede der Zahlen r_n im Grade m von $\mathfrak{L}'$ aufgeht, so besitzt der Voraussetzung nach $\mathfrak{L}'$ einen endlichen Teilkörper $\mathfrak{K}'_n$ vom Grade r_n, und es muß daher die in $\mathfrak{P}$ irreduzible Funktion $\overline{\varphi}_n(x)$, deren Grad r_n ist, in $\mathfrak{L}'$ in Linearfaktoren zerfallen. Wir denken uns nun aus $\mathfrak{L}'$ irgendein System von Elementen

$$i_1, i_2, \ldots \text{ in inf.}$$

derartig herausgegriffen, daß i_n Nullstelle von $\overline{\varphi}(x)$ wird.*) Aus diesem System wollen wir nun ein zweites solches

$$j''_1, j''_2, \ldots \text{ in inf.}$$

*) An dieser Stelle wird hier zum ersten Male von dem *Auswahlprinzip* Gebrauch gemacht. Dasselbe kann beim Beweise des vorliegenden Satzes auf keine Weise vermieden werden.

in eindeutig bestimmter Weise ableiten. Zu diesem Zweck setzen wir fest, daß $j_1' = i_1$ sein soll, und geben eine Methode an, nach welcher j_{n+1}' bestimmt wird, wenn die Elemente $j_1', \ldots j_n'$ bereits bestimmt sind. Nun ist i_{n+1} Nullstelle der in $\mathfrak{P}$ irreduziblen Funktion $\bar{\varphi}_{n+1}(x)$; es stellt daher auch jede Potenz $i_{n+1}^{p^f}$ eine Nullstelle von $\bar{\varphi}_{n+1}(x)$ dar, und man erhält jede Nullstelle einmal, wenn man dem Exponenten f die Werte $0, 1, \ldots (r_{n+1}-1)$ erteilt. Ferner folgt aus $\bar{\varphi}_{n+1}(i_{n+1}) = 0$, daß $\bar{\psi}_{n,n+1}(i_{n+1})$ Nullstelle von $\bar{\varphi}_n(x)$ ist. Durch

$$(6.) \qquad (\bar{\psi}_{n,n+1}(i_{n+1}))^{p^f}$$

wird jede Nullstelle von $\bar{\varphi}_n(x)$, also auch j_n' einmal dargestellt, wenn für f die Zahlen $0, 1, \ldots (r_n-1)$ gesetzt werden. Es sei ν diejenige unter diesen Zahlen, für welche der Ausdruck (6.) gleich j_n' wird. Dann wollen wir festsetzen, daß $j_{n+1}' = i_{n+1}^{p^\nu}$ sein soll. Da $\bar{\psi}_{n,n+1}(x)$ Funktion im Primkörper ist, so wird

$$j_n' = (\bar{\psi}_{n,n+1}(i_{n+1}))^{p^\nu} = \bar{\psi}_{n,n+1}(i_{n+1}^{p^\nu}) = \bar{\psi}_{n,n+1}(j_{n+1}'),$$

und wir haben also für jedes n die Gleichungen

$$(7.) \qquad \bar{\varphi}_n(j_n') = 0, \quad j_n' = \bar{\psi}_{n,n+1}(j_{n+1}').$$

Von den Körpern der Reihe

$$(8.) \qquad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{K}_1' = \mathfrak{P}(j_1'), \quad \mathfrak{K}_2' = \mathfrak{P}(j_2'), \ \ldots$$

ist jeder im nächsten enthalten, und alle sind Teilkörper von $\mathfrak{L}'$. Es kommt aber auch jedes Element aus $\mathfrak{L}'$ in Körpern dieser Reihe vor. Denn der Grad eines Elementes von $\mathfrak{L}'$ ist Teiler von m, also Teiler einer Zahl r_n, und der Körper $\mathfrak{K}_n'$, dessen Grad r_n ist, umfaßt (§ 15, 5.) alle Elemente von $\mathfrak{L}'$, deren Grad in r_n aufgeht. Da nun das Element j_n von $\mathfrak{K}_n$ und das Element j_n' von $\mathfrak{K}_n'$ Nullstellen derselben irreduziblen Funktion $\bar{\varphi}_n(x)$ aus $\mathfrak{P}$ sind, so existiert eine bestimmte isomorphe Beziehung π_n zwischen $\mathfrak{K}_n = \mathfrak{P}(j_n)$ und $\mathfrak{K}_n' = \mathfrak{P}(j_n')$, in welcher die Elemente j_n und j_n' einander entsprechen. Aus

$$j_n = \bar{\psi}_{n,n+1}(j_{n+1}), \quad j_n' = \bar{\psi}_{n,n+1}(j_{n+1}')$$

folgt ferner, daß die Beziehung π_{n+1} die Beziehung π_n umfaßt. Daraus ergibt sich aber sofort, daß durch die Isomorphismen

$$\pi_1, \pi_2, \ldots$$

eine ein-eindeutige und zwar isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ hergestellt wird. Damit ist Satz 3. bewiesen.

Wir wollen jetzt, auch wenn m eine unendliche G-Zahl ist, mit $\mathfrak{E}_{p,m}$ einen absolut algebraischen Körper von der Charakteristik p und vom Grade m bezeichnen. Der Grad m wurde erklärt als das kleinste gemeinsame Vielfache der Grade der endlichen in $\mathfrak{E}_{p,m}$ enthaltenen Körper oder, was dasselbe besagt, der Grade der Elemente von $\mathfrak{E}_{p,m}$; und das System dieser Grade ist identisch mit dem System der in m aufgehenden natürlichen Zahlen. Auf Grund hiervon zeigt man leicht:

4. *Adjungiert man dem Primkörper $\mathfrak{P}_p$ ein System $\mathfrak{S}$ von algebraischen Elementen, so entsteht ein absolut algebraischer Körper $\mathfrak{E}_{p,m}$, dessen Grad m gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Grade der Elemente von $\mathfrak{S}$ ist.*

Es sei nämlich m' dieses kleinste gemeinsame Vielfache. Dann ist m als kleinstes gemeinsames Vielfaches der Grade aller Elemente von $\mathfrak{E}_{p,m}$ durch m' teilbar. Ist nun zunächst $\mathfrak{S}$ ein endliches System, so ist $\mathfrak{E}_{p,m} = \mathfrak{P}_p(\mathfrak{S})$ ein endlicher Körper und enthält einen Körper $\mathfrak{E}_{p,m'}$. Diesem gehören aber alle Elemente von $\mathfrak{E}_{p,m}$ an, deren Grad in m' aufgeht. Da hierzu alle Elemente von $\mathfrak{S}$ gehören, so wird $\mathfrak{E}_{p,m'} = \mathfrak{E}_{p,m}$, also $m' = m$. — Ist das System $\mathfrak{S}$ unendlich, α ein Element von $\mathfrak{E}_{p,m}$, n sein Grad, so kann man ein endliches Teilsystem $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ derart bestimmen, daß α in dem endlichen Körper $\mathfrak{P}_p(\mathfrak{S}')$ enthalten ist. n geht dann in dem Grade von $\mathfrak{P}_p(\mathfrak{S}')$ auf, und dieser ist nach dem vorangehenden gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Grade der Elemente von $\mathfrak{S}'$, also Divisor von m'. Somit geht n in m' auf, und m' ist also das kleinste gemeinsame Vielfache nicht nur der Grade der Elemente von $\mathfrak{S}$, sondern aller Elemente von $\mathfrak{E}_{p,m}$. Also ist wieder $m' = m$.

Enthält ein Körper $\mathfrak{K}$ einen Körper $\mathfrak{E}_{p,m}$ und geht die natürliche Zahl n in m auf, so enthält $\mathfrak{E}_{p,m}$ einen endlichen Körper $\mathfrak{E}_{p,n}$ und dieser alle in $\mathfrak{K}$ vorkommenden Elemente vom Grade n (§ 15, 5.). Andererseits muß der Grad jedes Elementes von $\mathfrak{E}_{p,m}$ in m aufgehen. $\mathfrak{E}_{p,m}$ besteht also

aus allen absolut algebraischen Elementen von $\mathfrak{R}$, deren Grad in m aufgeht. Dies ist der Satz § 15, 5. in seiner Ausdehnung auf alle absolut algebraischen Körper von Primzahlcharakteristik. Aus ihm ergibt sich sofort, daß auch die Sätze 2., 3., 4., 8. des § 15 allgemein im Bereiche der absolut algebraischen Körper von Primzahlcharakteristik bestehen.

Es seien m und m' zwei G-Zahlen, m teilbar durch m'. Dann enthält ein Körper $\mathfrak{E}_{p,m}$ einen Körper $\mathfrak{E}_{p,m'}$. Es sei nun α ein Element von $\mathfrak{E}_{p,m}$, n sein absoluter Grad. Der absolute Grad des Körpers $\mathfrak{E}_{p,m'}(\alpha)$ ist dann nach 4. gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen v von m' und n. Ist nun m' endlich, so wird $v = [\mathfrak{E}_{p,m'}(\alpha) : \mathfrak{P}] = [\alpha : \mathfrak{E}_{p,m'}] \cdot m'$, $[\alpha : \mathfrak{E}_{p,m'}] = \frac{v}{m'}$, oder schließlich

$$(9.) \qquad [\alpha : \mathfrak{E}_{p,m'}] = \frac{n}{(n, m')},$$

wo wieder (n, m') den größten gemeinsamen Teiler von n und m' bezeichnet. Dieselbe Gleichung gilt aber auch, wenn m' keine natürliche Zahl ist. Denn bezeichnet in diesem Falle ν irgendeine in m' aufgehende natürliche Zahl, so enthält $\mathfrak{E}_{p,m'}$ einen Teilkörper $\mathfrak{E}_{p,\nu}$, und man hat zufolge (9.)

$$[\alpha : \mathfrak{E}_{p,m'}] \leqq [\alpha : \mathfrak{E}_{p,\nu}] = \frac{n}{(n, \nu)}.$$

Andererseits kann ν so gewählt werden, daß $[\alpha : \mathfrak{E}_{p,m'}] = \frac{n}{(n, \nu)}$ wird. Denn die irreduzible Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{E}_{p,m'}$, welche α zur Nullstelle hat, gehört einem *endlichen* Körper an, demjenigen nämlich, welcher aus $\mathfrak{P}$ durch Adjunktion der Koeffizienten von $f(x)$ hervorgeht. Ist ν der Grad dieses Körpers, so wird $[\alpha : \mathfrak{E}_{p,m'}] = [\alpha : \mathfrak{E}_{p,\nu}] = \frac{n}{(n, \nu)}$. Daher ist $[\alpha : \mathfrak{E}_{p,m'}]$ gleich dem Minimum des Ausdrucks $\frac{n}{(n, \nu)}$, und dieses tritt dann ein, wenn (n, ν) sein Maximum erreicht. Dieses kann, da ν Teiler von m' sein soll, nicht $> (n, m')$ sein, aber dieser Wert wird auch erreicht, nämlich für $\nu = (n, m')$. Daher gilt die Gleichung (9.) allgemein.

Wir betrachten jetzt die Körper $\mathfrak{E}_{p,k}$ zwischen $\mathfrak{E}_{p,m'}$ und $\mathfrak{E}_{p,m}$. Jede G-Zahl k, die Vielfaches von m' und Teiler von m ist, stellt den Grad eines solchen Körpers dar. Ist derselbe in bezug auf $\mathfrak{E}_{p,m'}$ endlich, so ist er auch einfach (§ 11, 5.; § 12, 5.). Ist alsdann α ein in bezug

auf $\mathfrak{E}_{p,m'}$ primitives Element von $\mathfrak{E}_{p,k}$, n sein absoluter Grad, so ist nach dem vorangehenden

$$[\mathfrak{E}_{p,k} : \mathfrak{E}_{p,m'}] = \frac{n}{(n, m')}.$$

Werden alle in bezug auf $\mathfrak{E}_{p,m'}$ endlichen Körper $\mathfrak{E}_{p,k}$ in Betracht gezogen, so kann n jede in m aufgehende natürliche Zahl sein. Die Gesamtheit aller Zahlen von der Form $\frac{n}{(n, m')}$ ist aber (wie sich aus der oben gegebenen Definition des Quotienten zweier G-Zahlen sofort ergibt) identisch mit der Gesamtheit aller natürlichen in $\frac{m}{m'}$ aufgehenden Zahlen und hat also $\frac{m}{m'}$ zum kleinsten gemeinsamen Vielfachen. Ist daher $\mathfrak{E}_{p,m}$ in bezug auf $\mathfrak{E}_{p,m'}$ endlich, so ist $\frac{m}{m'}$ eine natürliche Zahl, und umgekehrt; und es wird in diesem Falle

$$[\mathfrak{E}_{p,m} : \mathfrak{E}_{p,m'}] = \frac{m}{m'}.$$

Es wird sich deshalb empfehlen, diese Gleichung als Definition des Relativgrades aufzustellen für die Fälle, in denen $\frac{m}{m'}$ nicht endlich ist. Setzen wir nun für k alle in m aufgehenden Vielfachen von m', so stellt $\frac{k}{m'}$ alle Divisoren von $\frac{m}{m'}$, und zwar jeden einmal dar. Daraus ergibt sich:

5. *Ist $\mathfrak{E}_{p,m'}$ Teilkörper von $\mathfrak{E}_{p,m}$, so sind die in bezug auf $\mathfrak{E}_{p,m'}$ genommenen Grade der Körper zwischen $\mathfrak{E}_{p,m'}$ und $\mathfrak{E}_{p,m}$ Divisoren von $\frac{m}{m'}$; jeder Divisor von $\frac{m}{m'}$ stellt den Relativgrad eines und nur eines solchen Körpers dar.*

Es sei

$$m = \Pi q_i^{\varkappa_i},$$

$\varphi(x)$ eine irreduzible Funktion in einem Körper $\mathfrak{E}_{p,m}$, n ihr Grad. Durch Adjunktion einer Nullstelle von $\varphi(x)$ wird $\mathfrak{E}_{p,m}$ zu einem Körper $\mathfrak{E}_{p,\mu}$ erweitert, und es ist $n = \frac{\mu}{m}$. Hieraus folgt, daß n keinen Primfaktor q_i enthalten kann, dessen Exponent $\varkappa_i$ in der Zerlegung von m gleich ∞ ist. Ist andererseits n eine natürliche Zahl, welche keinen solchen Primfaktor enthält, so kann man μ so bestimmen, daß $\frac{\mu}{m} = n$ wird. Ein Körper $\mathfrak{E}_{p,\mu}$ ist dann in bezug auf seinen Teilkörper $\mathfrak{E}_{p,m}$ einfach und jedes primitive Element Nullstelle einer in $\mathfrak{E}_{p,m}$ irreduziblen Funktion vom Grade n. Also:

6. *In einem Körper $\mathfrak{E}_{p,m}$ gibt es irreduzible Funktionen aller und nur der (endlichen) Grade n, welche nur solche Primfaktoren q_i enthalten, deren Exponent $\varkappa_i$ in*

$$m = \Pi q_i^{\varkappa_i}$$

endlich ist.

Noch eine Bemerkung möge hier Platz finden. Man kann die bisherigen (und ebenso die folgenden) Untersuchungen über algebraische Erweiterungen auch in *Kronecker*scher Ausdrucksform mit Hilfe von Modulsystemen darstellen, doch muß man alsdann diesen Begriff dadurch erweitern, daß man auch ganze ganzzahlige Funktionen von unendlich vielen Unbestimmten in den Kreis der Betrachtungen zieht. Als solche Unbestimmte haben wir dann die oben eingeführten Elemente $j_1, j_2, \ldots$ zu deuten, während $\varphi_n(x)$ und $\psi_{d,n}(x)$ als ganze ganzzahlige mod. p reduzierte Funktionen einer weiteren Unbestimmten x aufzufassen sind. Es sei nun wieder m eine beliebige G-Zahl, $r_1, r_2, \ldots$ eine zugehörige Folge natürlicher Zahlen von der früher bezeichneten Art, und es werde $\bar{\varphi}_n$, $\bar{\psi}_{n,n+1}$ für $\varphi_{r_n}, \psi_{r_n, r_{n+1}}$ geschrieben. Es bezeichne ferner S das System aller ganzen ganzzahligen Funktionen der Unbestimmten j (dies ist natürlich so zu verstehen, daß jedes einzelne Element von S immer nur eine endliche Anzahl dieser Unbestimmten enthalten soll), T das Teilsystem von S, welches aus den Funktionen

$$p; \quad \bar{\varphi}_1(j_1), \ \bar{\varphi}_2(j_2), \ \ldots; \quad \bar{\psi}_{1,2}(j_2) - j_1, \ \bar{\psi}_{2,3}(j_3) - j_2, \ \ldots$$

besteht. Durch T wird ein „*Modulsystem* M“ definiert. Zwei Elemente aus S heißen kongruent modulo M, wenn ihre Differenz in der Form

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + \cdots + A_\nu B_\nu$$

darstellbar ist, wo $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ Elemente aus S und $B_1, B_2, \ldots B_\nu$ Elemente aus T sind. Nunmehr zerfällt jede ganze ganzzahlige mod. p reduzierte Funktion von x, deren Grad in m aufgeht, mod. M auf eine bestimmte Weise in Linearfaktoren, deren Koeffizienten Elemente aus S sind, und die Restklassen des Modulsystems M innerhalb S bilden einen Körper vom Typus $\mathfrak{E}_{p,m}$. Nimmt man

$$m = \Pi q_i^{\varkappa},$$

so zerfällt jede ganze Funktion von x, deren Koeffizienten zu S gehören, mod. M in Linearfaktoren (s. § 17.).

§ 17.

Algebraisch abgeschlossene Körper.

In § 8. haben wir die Aufgabe behandelt: *In einem Körper* $\mathfrak{K}$ *ist eine ganze Funktion* $f(x)$ *gegeben; gesucht ist ein Erweiterungskörper* $\mathfrak{L}$, *in welchem* $f(x)$ *vollständig zerfällt.* Wir können uns nun aber auch die wesentlich weitergehende Aufgabe stellen, *zu dem Körper* $\mathfrak{K}$ *eine solche Erweiterung* $\mathfrak{L}$ *zu finden, in welcher jede Funktion aus* $\mathfrak{K}$ *zerfällt.* Der vorangehende Paragraph enthält die Lösung dieses Problems für den Fall des Primkörpers $\mathfrak{P}_p$. Setzen wir nämlich

$$m = \Pi q_i^{\infty}, \quad \mathfrak{E}_{p,m} = \mathfrak{A}_p,$$

so ist m durch jede natürliche Zahl n teilbar, und es muß daher in $\mathfrak{A}_p$ jede irreduzible und also auch jede reduzible Funktion aus $\mathfrak{P}_p$ vollständig zerfallen.*) Aus § 16, 6. ist aber weiter zu ersehen, daß in $\mathfrak{A}_p$ nur irreduzible Funktionen vom Grade 1 existieren. $\mathfrak{A}_p$ gehört demnach zu jener besonderen Art von Körpern, die wir (§ 7.) als abgeschlossene bezeichnet haben. Diese sind natürlich für die hier berührte Frage von der größten Wichtigkeit, und wir stellen deshalb hier einige einfache auf dieselben bezügliche Sätze zusammen.

1. *Ist* $\mathfrak{L}$ *eine algebraische Erweiterung eines Körpers* $\mathfrak{K}$ *und zerfällt jede ganze Funktion aus* $\mathfrak{K}$ *im Körper* $\mathfrak{L}$ *in Linearfaktoren, so ist* $\mathfrak{L}$ *algebraisch abgeschlossen.*

Es sei nämlich $\varphi(x)$ eine irreduzible Funktion aus $\mathfrak{L}$, j eine Nullstelle, die $\varphi(x)$ in $\mathfrak{L}$ oder einem Erweiterungskörper von $\mathfrak{L}$ besitzt. Dann ist $\mathfrak{L}(j)$ algebraisch in bezug auf $\mathfrak{L}$, also auch in bezug auf $\mathfrak{K}$, und j Nullstelle einer ganzen Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{K}$. Da diese in $\mathfrak{L}$ in Linearfaktoren zerfällt, in $\mathfrak{L}(j)$ aber den Linearfaktor $x-j$ hat, so ist j Element von $\mathfrak{L}$, mithin $\varphi(x)$ vom Grade 1, womit Satz 1. bewiesen ist.

Es sei $\mathfrak{L}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathfrak{K}$ ein Teilkörper von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$ der Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, welcher die in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraischen Elemente umfaßt. Eine beliebige Funktion $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{A}$ zerfällt

*) Von einem solchen Körper spricht *L. E. Dickson* (Transactions of the American Math. Soc. 8 (1907), p. 389). Er erklärt ihn aber unkorrekt als Gesamtheit aller *Galois*schen Felder, die zur Primzahl p gehören (*Galois*sches Feld = endlicher Körper bzw. Typus eines solchen); ein Existenzbeweis wird nicht erbracht.

dann in $\mathfrak{L}$ in Linearfaktoren, ihre Nullstellen sind in bezug auf $\mathfrak{A}$, also auch in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch, mithin Elemente von $\mathfrak{A}$. Somit zerfällt $\varphi(x)$ schon in $\mathfrak{A}$ vollständig, der Körper $\mathfrak{A}$ ist also algebraisch abgeschlossen. — Ist $\mathfrak{T}$ ein Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, α ein Element aus $\mathfrak{A}$, $\psi(x)$ die irreduzible Funktion aus $\mathfrak{K}$ mit der Nullstelle α, so gehört $\psi(x)$ auch zum Körper $\mathfrak{T}$, und wenn $\mathfrak{T}$ algebraisch abgeschlossen ist, so zerfällt $\psi(x)$ in $\mathfrak{T}$ in Linearfaktoren, α ist Element, also $\mathfrak{A}$ Teilkörper von $\mathfrak{T}$. Somit erweist sich $\mathfrak{A}$ als *kleinster* algebraisch abgeschlossener Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, er ist in allen andern solchen Körpern enthalten. Soll $\mathfrak{L}$ selbst eine möglichst kleine algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $\mathfrak{K}$ sein, so muß $\mathfrak{L} = \mathfrak{A}$ sein. Also:

2. *In jeder Erweiterung $\mathfrak{L}$ eines Körpers $\mathfrak{K}$, die einen algebraisch abgeschlossenen Körper darstellt, ist eine kleinste derartige Erweiterung enthalten; sie ist vor allen andern dadurch ausgezeichnet, daß sie algebraisch ist.*

Nehmen wir in den voranstehenden Betrachtungen für $\mathfrak{K}$ den in $\mathfrak{L}$ enthaltenen Primkörper $\mathfrak{P}$, so wird $\mathfrak{A}$ ein absolut algebraischer Körper und besteht aus allen absolut algebraischen Elementen von $\mathfrak{L}$. Ist die Charakteristik von $\mathfrak{L}$ eine Primzahl p, so hat auch $\mathfrak{A}$ diese Charakteristik, ist also ein Körper $\mathfrak{E}_{p,m}$. Da jede irreduzible Funktion aus $\mathfrak{P}_p$ in $\mathfrak{E}_{p,m}$ zerfällt, so muß m durch jede natürliche Zahl teilbar sein, woraus

$$m = \Pi\, q_i^{\infty},\quad \mathfrak{E}_{p,m} = \mathfrak{A}_p$$

folgt. Also:

3. *In jedem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathfrak{L}$ von der Charakteristik p ist ein Körper vom Typus $\mathfrak{A}_p$ enthalten; er besteht aus allen absolut algebraischen Elementen von $\mathfrak{L}$.*

Analoges gilt für Körper von der Charakteristik 0. Indem wir uns zunächst auf bekannte Tatsachen berufen, bemerken wir, daß der Körper aller algebraischen Zahlen algebraisch abgeschlossen ist, und daß er eine algebraische Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen darstellt. Für diesen Typus gebrauchen wir wie früher das Zeichen $\mathfrak{P}_0$, für jenen führen wir das Zeichen $\mathfrak{A}_0$ ein. Zum Körper aller algebraischen Zahlen gelangt man gewöhnlich, indem man dieselben als spezielle komplexe Zahlen ansieht. Aber auch ohne die allgemeinen komplexen Zahlen zu Hilfe zu nehmen, kann man, wie von $\mathfrak{P}_p$ zu $\mathfrak{A}_p$, so von $\mathfrak{P}_0$ zu einem absolut algebraischen und

algebraisch abgeschlossenen Körper gelangen, indem man eine unendliche Folge von Körpern

$$\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{P}_0, \quad \mathfrak{K}_1, \quad \mathfrak{K}_2, \quad \ldots$$

definiert, deren jeder einzelne die vorangehenden umfaßt und in bezug auf $\mathfrak{P}_0$ noch endlich ist, und deren Elemente in ihrer Gesamtheit einen algebraisch abgeschlossenen Körper repräsentieren. Auch hier gelingt mit Benutzung des Auswahlprinzipes der Nachweis, daß $\mathfrak{A}_0$ der einzige Typus der verlangten Art ist. Daher gilt Satz 3. auch für die Charakteristik 0.

Wir gehen auf diese speziellen Untersuchungen nicht weiter ein, werden vielmehr ganz allgemein nachweisen, *daß jeder Körper* $\mathfrak{K}$ *zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper erweitert werden kann, und daß die Aufgabe, eine solche Erweiterung zu finden, im wesentlichen nur eine Lösung hat, wenn man noch fordert, daß die Erweiterung möglichst klein, oder* — was nach 2. auf dasselbe hinauskommt, — *daß sie algebraisch sein soll.*

§ 18.

Beziehungen zwischen Systemen ganzer Funktionen und Erweiterungskörpern.

Bei den Untersuchungen dieses Paragraphen denken wir uns einen beliebig gewählten Körper $\mathfrak{K}$ zugrunde gelegt. Wir betrachten Systeme ganzer Funktionen einer Unbestimmten x mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$. Solche Funktionen sind stets gemeint, wenn von Funktionensystemen schlechthin die Rede ist; ebenso beziehen sich Ausdrücke wie „Erweiterungskörper", „Normalfunktion" u. s. f. stets auf den Grundkörper $\mathfrak{K}$.

Ist $\mathfrak{L}$ ein Erweiterungskörper, S ein System von endlich oder unendlich vielen Funktionen, die in $\mathfrak{L}$ vollständig zerfallen, so ist in $\mathfrak{L}$ eine bestimmte Erweiterung $\mathfrak{L}'$ enthalten, die zur vollständigen Zerlegung der Funktionen aus S gerade hinreicht. Es wird nämlich $\mathfrak{L}' = \mathfrak{K}(\mathfrak{T})$, wo $\mathfrak{T}$ das System der Nullstellen bezeichnet, welche die Funktionen des Systems S innerhalb $\mathfrak{L}$ besitzen.

Bezeichnet S irgendein endliches Funktionensystem, so gibt es (s. d. Schluß von § 8) stets Erweiterungskörper, in denen die Funktionen aus S vollständig zerfallen. Wir stellen nun die Definition auf:

Definition 1. Eine Funktion $\varphi(x)$ heißt *dem endlichen Funktionensystem* S *untergeordnet*, wenn sie in jedem Erweiterungskörper, in welchem die Funktionen aus S vollständig zerfallen, ebenfalls vollständig zerfällt.

Es ergibt sich sogleich:

1. *Die Funktion $\varphi(x)$ ist dem endlichen System S untergeordnet, sobald sie in irgendeinem Erweiterungskörper Ω_1, der zur vollständigen Zerfällung des Systems S gerade hinreicht, ebenfalls zerfällt.*

Denn ist Ω_2 irgendeine zweite Erweiterung, innerhalb deren S vollständig zerfällt, so enthält Ω_2 eine Erweiterung Ω_2', welche zur vollständigen Zerfällung von S gerade hinreicht. Nach § 8, 2. sind Ω_1 und Ω_2' äquivalente Erweiterungen, und da $\varphi(x)$ in Ω_1 vollständig zerfällt, so auch in Ω_2' und mithin in Ω_2.

Es stände nun nichts im Wege, die Definition 1. auch für den Fall gelten zu lassen, daß das System S aus unendlich vielen Funktionen besteht, wenn schon bewiesen wäre, daß auch in diesem Falle Erweiterungskörper, in denen die Funktionen von S vollständig zerfallen, existieren. So aber sind wir auf eine andere Definition angewiesen. Zu einer solchen gelangen wir, indem wir von der Bemerkung ausgehen, daß im Falle eines endlichen Systems S eine Funktion $\varphi(x)$, welche einem Teilsystem von S untergeordnet ist, auch S selbst untergeordnet ist.

Definition 2. Eine Funktion $\varphi(x)$ heißt *dem unendlichen System S untergeordnet*, wenn sie irgendeinem *endlichen* Teilsystem von S untergeordnet ist. — Sind S_1, S_2 irgend zwei Funktionensysteme, so sagen wir, *S_1 ist S_2 untergeordnet*, wenn jede Funktion aus S_1 dem System S_2 untergeordnet ist.

Es gilt dann der Satz:

2. *Ist das System S_1 dem System S_2, dieses dem System S_3 untergeordnet, so ist S_1 dem System S_3 untergeordnet.*

Eine beliebige Funktion $\varphi(x)$ aus S_1 ist nämlich einem endlichen Teilsystem S_2' von S_2, dieses einem endlichen Teilsystem S_3' von S_3 untergeordnet (Def. 2.). Da S_3' endlich ist, so existieren Erweiterungen, innerhalb deren alle Funktionen von S_3' vollständig zerfallen. In einer jeden solchen Erweiterung zerfallen die Funktionen von S_2', zerfällt also auch $\varphi(x)$ vollständig (Def. 1.). Mithin ist $\varphi(x)$ dem System S_3', also auch dem System S_3 untergeordnet, womit 2. bewiesen ist.

Definition 3. Zwei Funktionensysteme heißen äquivalent, wenn jedes dem andern untergeordnet ist.

Aus den vorangehenden Definitionen und Sätzen ergibt sich sofort, daß jedes Funktionensystem sich selbst äquivalent ist; daß zwei Funktionen-

systeme, die einem dritten äquivalent sind, einander äquivalent sind, daß jedes System von endlich vielen Funktionen dem Produkt dieser Funktionen äquivalent ist.

Definition 4. Ein Funktionensystem S soll *vollständig* heißen, wenn jede S untergeordnete Funktion zu S gehört.

Ist S ein beliebiges System, so muß ein System S', wenn es vollständig und zu S äquivalent sein soll, nur solche Funktionen enthalten, die S untergeordnet sind, diese aber auch alle. Andererseits sieht man sofort, daß das System aller S untergeordneten Funktionen in der Tat zu S äquivalent und vollständig ist. Es ist also jedes System S genau *einem* vollständigen System äquivalent. Das *kleinste* vollständige System wird offenbar von den Funktionen gebildet, die in $\mathfrak{R}$ selbst vollständig zerfallen, das *größte* von der Gesamtheit aller Funktionen aus $\mathfrak{R}$. Ferner ist evident, daß der Durchschnitt zweier vollständiger Systeme oder auch eines beliebigen Systems von endlich oder unendlich vielen vollständigen Systemen wieder ein vollständiges System ist.

An diese Sätze reihen sich einige andere, welche Beziehungen zwischen Funktionensystemen und zugehörigen Zerlegungskörpern ausdrücken. Zunächst ergibt sich aus den vorangehenden Definitionen und Sätzen ohne weiteres:

3. *Ist $\mathfrak{L}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{R}$, S ein Funktionensystem, welches in $\mathfrak{L}$ vollständig zerfällt, so zerfällt auch jedes S untergeordnete System S' in $\mathfrak{L}$ vollständig, und wenn S und S' äquivalent sind und die Erweiterung $\mathfrak{L}$ zur vollständigen Zerfällung von S gerade hinreicht, so ist sie auch zur vollständigen Zerfällung von S' gerade hinreichend.*

Dieser Satz zeigt, daß bei den Fragen nach der Existenz und den Eigenschaften solcher Erweiterungen, in denen ein gegebenes Funktionensystem zerfällt, dieses durch irgendein äquivalentes ersetzt werden darf.

Wir beweisen ferner:

4. *Ist die Erweiterung $\mathfrak{N}$ gerade hinreichend, um das Funktionensystem S vollständig zu zerlegen, so ist sie normal, und jede Funktion die in $\mathfrak{N}$ vollständig zerfällt, ist dem System S untergeordnet.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{T}$ das System derjenigen Elemente aus $\mathfrak{N}$, welche Nullstellen von Funktionen aus S sind. Dann folgt aus unserer Voraussetzung, daß $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ ist. Es bezeichne nun $\varphi(x)$ irgendeine irreduzible

Funktion aus $\mathfrak{k}$, die in $\mathfrak{R}$ eine Nullstelle α besitzt. Dann kann man ein endliches Teilsystem $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$ angeben derart, daß α schon dem Körper $\mathfrak{k}(\mathfrak{T}')$ angehört, und, weil $\mathfrak{T}'$ endlich ist, ein endliches Teilsystem S' von S derart, daß die Elemente aus $\mathfrak{T}'$ Nullstellen von Funktionen aus S' sind. Bezeichnet $\mathfrak{T}''$ das System aller Nullstellen der Funktionen aus S', so enthält auch der Erweiterungskörper $\mathfrak{R}' = \mathfrak{k}(\mathfrak{T}'')$ das Element α und reicht gerade hin, die Funktionen aus S' vollständig zu zerlegen. Daher ist $\mathfrak{R}'$, weil S' ein endliches System ist, nach § 8, 6. in bezug auf $\mathfrak{k}$ normal, und die Funktion $\varphi(x)$ muß also in $\mathfrak{R}'$ und somit in $\mathfrak{R}$ vollständig zerfallen. Damit ist aber gezeigt, daß die algebraische Erweiterung $\mathfrak{R} = \mathfrak{k}(\mathfrak{T})$ ebenfalls normal ist. Sodann folgt aus dem Umstande, daß $\varphi(x)$ in dem Körper $\mathfrak{R}'$, der zur vollständigen Zerfällung des endlichen Systems S' gerade hinreicht, ebenfalls zerfällt, daß $\varphi(x)$ dem System S' untergeordnet ist (Satz 1.). $\varphi(x)$ ist demnach auch S untergeordnet. Ist endlich $f(x)$ irgendeine in $\mathfrak{R}$ vollständig zerfallende Funktion, so ist nach dem vorangehenden jeder irreduzible Faktor von $f(x)$ dem System S untergeordnet; daher gilt dasselbe von $f(x)$ selbst. Damit ist Satz 4. bewiesen. — Aus demselben geht hervor, daß wenn für ein System S die Existenz eines Erweiterungskörpers, in welchem S vollständig zerfällt, einmal feststeht, für dieses System S die beiden Definitionen 1. und 2. auf dasselbe hinauskommen.

5. *Die Gesamtheit S aller Funktionen, die in einem Erweiterungskörper $\mathfrak{R}$ vollständig zerfallen, stellt ein vollständiges System dar, und wenn die Erweiterung normal ist, so ist sie zur vollständigen Zerfällung von S gerade hinreichend.*

Eine Funktion $\varphi(x)$ nämlich, welche S untergeordnet ist, muß in $\mathfrak{R}$ vollständig zerfallen, gehört also zu S, d. h. das System S ist vollständig. Bezeichnet ferner $\mathfrak{T}$ das System der Elemente von $\mathfrak{R}$, welche Nullstellen von Funktionen aus S sind, so reicht die in $\mathfrak{R}$ enthaltene Erweiterung $\mathfrak{k}(\mathfrak{T})$ zur Zerfällung von S gerade hin. Ist nun $\mathfrak{R}$ normal, also auch algebraisch, so ist jedes Element α aus $\mathfrak{R}$ Nullstelle einer in $\mathfrak{k}$ irreduziblen Funktion $\varphi(x)$, die in $\mathfrak{R}$ vollständig zerfällt, also zu S gehört. Daher ist α Element von $\mathfrak{T}$, mithin von $\mathfrak{k}(\mathfrak{T})$, und es wird $\mathfrak{R} = \mathfrak{k}(\mathfrak{T})$, womit 5. bewiesen ist.

Wir schließen diese Untersuchungen mit dem Beweise des Satzes:

6. ***Jedes Funktionensystem S ist einem System von Normalfunktionen äquivalent.***

Beweis: (Vgl. § 13, 3.). Es bestehe S zunächst aus einer einzigen irreduziblen Funktion $\varphi(x)$, und es bezeichne $\mathfrak{N}$ eine Erweiterung, welche zur vollständigen Zerlegung von $\varphi(x)$ gerade hinreicht. Dann ist $\mathfrak{N}$ Normalkörper. Besitzt $\mathfrak{N}$ ein primitives Element α, so ist die in $\mathfrak{k}$ irreduzible Funktion $\psi(x)$, welche α zur Nullstelle hat, normal und mit $\varphi(x)$ äquivalent. Besitzt $\mathfrak{N}$ kein primitives Element, so muß $\mathfrak{k}$ ein unvollkommener Körper sein und $\varphi(x)$ einen Exponenten $f>0$ haben (§ 13, 7.). Es sei

$$\varphi(x) = x^{np^f} + a_1 x^{(n-1)p^f} + \cdots + a_n.$$

Die Funktion $\varphi(x)$ ist dann in dem Körper $\mathfrak{N}$, in dem sie zerfällt, p^f-te Potenz einer andern Funktion

$$\chi(x) = (x-\gamma_1)\cdots(x-\gamma_n) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

und aus $\varphi(x) = (\chi(x))^{p^f}$ folgt

$$a_k = b_k^{p^f}. \qquad (k=1,\ldots n)$$

$\varphi(x)$ hat die Nullstellen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, während die Funktion

$$\bar{\varphi}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

die eine irreduzible Funktion erster Art ist, die Nullstellen $\gamma_1^{p^f}, \gamma_2^{p^f}, \ldots \gamma_n^{p^f}$ hat. Diese sind voneinander verschieden, dasselbe gilt also auch für $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$. Aus $a_k = b_k^{p^f}$ folgt $x^{p^f} - a_k = (x-b_k)^{p^f}$. Die irreduzible Funktion aus $\mathfrak{k}$ mit der Nullstelle b_k hat daher die Form

$$(x-b_k)^{p^{f_k}} \qquad (0 \leqq f_k \leqq f;\ k=1,\ldots n)$$

und ist Normalfunktion. Der Körper $\mathfrak{N}' = \mathfrak{k}(\gamma_1^{p^f}, \gamma_2^{p^f}, \ldots \gamma_n^{p^f})$, welcher zur vollständigen Zerfällung von $\bar{\varphi}(x)$ gerade hinreicht, ist normal, in $\mathfrak{N}$ enthalten und stellt eine endliche Erweiterung erster Art von $\mathfrak{k}$ dar. Daher gibt es in $\mathfrak{N}'$ primitive Elemente. Es sei α ein solches und $\bar{\psi}(x)$ die irreduzible Funktion aus $\mathfrak{k}$ mit der Nullstelle α. Dann ist $\bar{\psi}(x)$ eine mit $\bar{\varphi}(x)$ äquivalente Normalfunktion. Das System T der Normalfunktionen

$$\bar{\psi}(x),\ (x-b_1)^{p^{f_1}},\ (x-b_2)^{p^{f_2}},\ \ldots\ (x-b_n)^{p^{f_n}}$$

geht in ein äquivalentes T' über, wenn man $\bar{\psi}(x)$ durch $\bar{\varphi}(x)$ ersetzt. Alle diese Funktionen zerfallen in $\mathfrak{R}$ vollständig, sind also der Funktion $\varphi(x)$ untergeordnet. Ein Körper $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{R}$, der zur vollständigen Zerfällung des Systems T' ausreicht, muß die Elemente $b_1, b_2, \ldots b_n$, mithin die Funktion $\chi(x)$, ferner die Nullstellen $\gamma_k^{p^f}$ von $\bar{\varphi}(x)$ und somit die Funktionen $x^{p^f} - \gamma_k^{p^f} = (x-\gamma_k)^{p^f}$ enthalten. Daher sind auch die Funktionen

$$(\chi(x), (x-\gamma_k)^{p^f}) = x - \gamma_k$$

und also auch die Elemente γ_k in $\mathfrak{M}$ enthalten, und aus $\mathfrak{R} = \mathfrak{k}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$ folgt $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$, daraus die Äquivalenz von $\varphi(x)$ und T' und endlich die Äquivalenz von $\varphi(x)$ und dem Normalfunktionensystem T.

Damit ist Satz 6. für den Fall erledigt, daß S aus einer einzigen irreduziblen Funktion besteht. Es sei jetzt S ein beliebiges Funktionensystem, S' das System aller irreduziblen Faktoren der in S vorkommenden Funktionen, S'' das System aller S' untergeordneten Normalfunktionen. Dann ist zunächst S mit S' äquivalent und S'' dem System S' untergeordnet. Da ferner jede Funktion aus S' nach dem vorangehenden einem System von Normalfunktionen äquivalent ist, und dieses Teilsystem von S'' ist, so ergibt sich die Äquivalenz von S' und S'', und S ist dem Normalfunktionensystem S'' äquivalent.

§ 19.

Hilfsbetrachtungen aus der Mengenlehre.

Nach Satz 5. des vorigen Paragraphen entspricht jeder normalen Erweiterung eines Körpers $\mathfrak{k}$ eine Klasse äquivalenter Funktionensysteme, zu deren Zerfällung die Erweiterung gerade hinreicht, und wie sofort zu sehen ist, entspricht jeder äquivalenten Erweiterung dieselbe Systemklasse. Der Nachweis, daß umgekehrt jeder Systemklasse eine und, abgesehen von äquivalenten, nur eine normale Erweiterung entspricht, macht es notwendig, Betrachtungen aus der Mengenlehre mit heranzuziehen, und ist insbesondere ohne Benutzung des Auswahlprinzips nicht vollständig zu führen. Es folge darum hier eine kurze Zusammenstellung einiger Begriffe und Sätze aus der genannten Disziplin, die im folgenden gebraucht werden.

1. *Geordnete Mengen.* — Eine Menge oder ein System von Elementen heißt nach *G. Cantor geordnet*, wenn eine Festsetzung getroffen ist, derzufolge von je zwei verschiedenen Elementen a, b das eine, etwa a, als das frühere (kleinere), das andere b als das spätere (größere) gilt; in Zeichen:

$$a < b \text{ oder } b > a.$$

Die Festsetzung muß jedoch eine derartige sein, daß aus $a < b, b < c$ allemal $a < c$ folgt.

2. *Schnitt.* — Werden die Elemente einer geordneten Menge M derart in zwei Teilmengen A, B eingeteilt, daß jedes Element von M einer und nur einer dieser Teilmengen angehört, und daß alle Elemente von A früher als alle von B sind, so heißt eine solche Einteilung ein *Schnitt* (*Dedekind*), die Teilmenge A wird *Abschnitt*, B *Rest* genannt (*Cantor*).

3. *Ordnungstypen.* — Unter einer *ähnlichen Abbildung* zweier geordneter Mengen M und N versteht man eine ein-eindeutige Beziehung zwischen ihren Elementen, bei welcher allemal dem früheren von zwei Elementen aus M in N wieder das frühere der beiden zugeordneten Elemente entspricht. Geordnete Mengen, welche eine solche Abbildung zulassen, werden *ähnlich* oder *von gleichem Ordnungstypus* genannt (*Cantor*).

4. *Wohlgeordnete Mengen.* — Eine Menge M heißt *wohlgeordnet* (*Cantor*), wenn eine Festsetzung getroffen ist, derzufolge von je zwei Elementen a, b das eine als das frühere, das andere als das spätere gilt, und wenn diese Festsetzung eine solche ist, daß sowohl M als auch jede Teilmenge von M ein *erstes* Element d. h. ein solches enthält, welches früher als jedes andere Element der Menge bzw. Teilmenge ist. — *Jede wohlgeordnete Menge ist zugleich eine geordnete;* denn wenn $a < b$, $b < c$ ist, so kann nicht $a = c$ sein, weil die Fälle $a < b$, $b < a$ einander ausschließen; es kann auch nicht $c < a$ sein, weil sonst die aus den Elementen a, b, c bestehende Menge kein erstes Element enthielte; es ist also $a < c$. — Zu den wohlgeordneten Mengen gehören auch die geordneten endlichen Mengen; sie sind dadurch charakterisiert, daß bei ihnen jede Teilmenge auch ein letztes Element besitzt.

5. *Ordnungszahlen.* — Die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen werden *Ordnungszahlen* genannt, die Ordnungszahlen endlicher Mengen durch $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet. — *Sind M und N wohlgeordnete Mengen, so hat stets einer der drei einander ausschließenden Fälle statt:*

a) *M und N sind ähnlich; es gibt dann eine und nur eine ähnliche Beziehung zwischen M und N;*

b) *M ist einem bestimmten Abschnitt von N ähnlich;*

c) *N ist einem bestimmten Abschnitt von M ähnlich.*

Im ersten Falle haben M und N gleiche Ordnungszahl, im zweiten wird die Ordnungszahl von M *kleiner*, im dritten *größer* als die von N genannt. Es ist zweckmäßig, auch noch eine Ordnungszahl 0 einzuführen, welche als kleinste von allen gilt.

Jedes System von Ordnungszahlen stellt, wenn dieselben nach aufsteigender Größe geordnet werden, eine wohlgeordnete Menge dar, und insbesondere bilden die sämtlichen Ordnungszahlen inkl. 0, welche kleiner als eine Ordnungszahl σ sind $(\sigma > 0)$, eine wohlgeordnete Menge, welcher selbst die Ordnungszahl σ zukommt. Hat man daher eine wohlgeordnete Menge von der Ordnungszahl σ, so empfiehlt es sich, ihre Elemente durch ein Zeichen mit Index darzustellen:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots,$$

wobei der Index ν alle Ordnungszahlen $0 \leqq \nu < \sigma$ durchläuft. Jeder Ordnungszahl ν (für $0 < \nu < \sigma$) entspricht dann ein bestimmter Abschnitt des wohlgeordneten Systems, welcher gerade die Ordnungszahl ν hat. Er wird von allen Elementen gebildet, welche a_ν vorangehen, man nennt ihn deshalb auch den *durch a_ν bestimmten Abschnitt.* — Zum Zweck einfacher Darstellung treffen wir folgende Festsetzungen: Ein wohlgeordnetes System von Elementen a_ν wird mit

$$\{a_\nu\} \quad \text{oder genauer} \quad \{a_\nu\} \quad (0 \leqq \nu < \sigma)$$

bezeichnet, wo σ die Ordnungszahl des Systems angibt, oder auch mit einem bloßen Buchstaben, etwa A. Im letzten Falle ist unter A_ν $(0 < \nu < \sigma)$ allemal der durch a_ν bestimmte Abschnitt von A zu verstehen, während $A_\sigma = A$ zu setzen ist.

Unter den von 0 verschiedenen Ordnungszahlen sind solche *erster* und *zweiter Art* zu unterscheiden. Eine Ordnungszahl α heißt von der ersten oder zweiten Art, je nachdem eine wohlgeordnete Menge von der Ordnungszahl α ein letztes Element enthält oder nicht. Da das System aller Ordnungszahlen unter α selbst die Ordnungszahl α hat, so gibt es,

wenn α von erster Art ist, eine Ordnungszahl β, welche α unmittelbar vorangeht. Wir setzen $\beta = \alpha - 1$, $\alpha = \beta + 1$. Ist α von der zweiten Art, so gibt es keine unmittelbar vorangehende Ordnungszahl. Diese Ordnungszahlen werden auch Limeszahlen genannt. Der Grund für diese Bezeichnung erhellt aus folgender Überlegung: Es sei S ein System von Ordnungszahlen von der Beschaffenheit, daß keine größte unter ihnen ist, also jede durch andere Zahlen desselben Systems übertroffen wird (z. B. das System aller endlichen oder aller geraden endlichen Ordnungszahlen). Es bezeichne ferner T das System aller derjenigen Ordnungszahlen, welche von irgendeiner Ordnungszahl aus S übertroffen werden. Dann ist evident, daß S in T enthalten ist, daß auch T keine größte Zahl enthält, daß, wenn σ irgendeine Ordnungszahl aus T ist, auch jede Ordnungszahl $< \sigma$ zu T gehört. Dem System T kommt selbst eine Ordnungszahl τ zu, die Limeszahl ist. Ist nun $\sigma > 0$ irgendein Element von T, so bilden die Ordnungszahlen, welche $< \sigma$ sind, einen Abschnitt von T, dessen Ordnungszahl kleiner als die Ordnungszahl von T ist. D. h. es ist $\sigma < \tau$. Andererseits muß jede Ordnungszahl $< \tau$ zu T gehören. Denn wäre das System T nur ein Teil des Systems T' aller Ordnungszahlen $< \tau$, so würden die zu T gehörigen Zahlen aus T' den nicht zu T gehörigen vorangehen, d. h. T wäre Abschnitt von T', und die Ordnungszahl τ von T wäre kleiner als die von T', während doch T' als System aller Ordnungszahlen $< \tau$ die Ordnungszahl τ zukommen muß. Es besteht also T aus allen und nur den Ordnungszahlen $< \tau$, und der Erklärung von T zufolge stellt nunmehr τ die kleinste Ordnungszahl dar, welche von keiner Ordnungszahl des Systems S übertroffen wird. Eine solche Zahl existiert also für jedes System von Ordnungszahlen, welches kein Maximum besitzt, und sie wäre nach Analogie des gewöhnlichen Sprachgebrauchs als *obere Grenze von* S zu bezeichnen. Jede Limeszahl τ ist u. a. die obere Grenze aller Ordnungszahlen $< \tau$.

6. *Die vollständige Induktion und der Wohlordnungssatz.* — Wenn eine gewisse auf Ordnungszahlen bezügliche Aussage für eine Ordnungszahl α gilt, für eine andere $\beta > \alpha$ nicht gilt und T das System derjenigen Ordnungszahlen zwischen α und β (einschließlich α und β) bezeichnet, für welche die Aussage nicht besteht, so hat T als wohlgeordnete Menge ein erstes Element γ, und es ist dann γ die kleinste Ordnungszahl $> \alpha$, für

welche die Aussage nicht gilt. Daher besteht im Gebiete der Ordnungszahlen der *Satz von der vollständigen Induktion: Gilt irgendein Satz für die Ordnungszahl α und kann man nachweisen, daß er für die Ordnungszahl $\beta > \alpha$ gelten muß, sobald er für alle Ordnungszahlen, die $< \beta$ und $\geqq \alpha$ sind, richtig ist, so gilt der Satz für alle Ordnungszahlen $\geqq \alpha$.* Auf dem Satz von der vollständigen Induktion beruht die Bedeutung der Ordnungszahlen für die Anwendungen. *Ihre ausgedehnte Anwendungsfähigkeit aber wird durch den Satz von Zermelo*) erschlossen, demzufolge jede Menge wohlordnungsfähig ist.* Der Satz betrifft natürlich nur die *Existenz* der Wohlordnung, er gibt keine Methode, dieselbe bei jeder beliebig gegebenen Menge wirklich auszuführen.

§ 20.
Die nächsten Anwendungen.

Definition 1. *Fortschreitende Funktionensysteme.* — Es sei $\mathfrak{R}_0$ ein beliebiger Körper. Ein wohlgeordnetes System $S = \{f_\nu(x)\}$ ganzer Funktionen aus $\mathfrak{R}_0$ soll ein *fortschreitendes* (*in bezug auf* $\mathfrak{R}_0$) heißen, wenn $f_0(x)$ in $\mathfrak{R}_0$ nicht vollständig zerfällt und von den übrigen Funktionen $f_\nu(x)$ keine dem durch sie bestimmten Abschnitt von S untergeordnet (§ 18) ist.

1. *Ist S ein wohlgeordnetes System ganzer Funktionen aus $\mathfrak{R}_0$, die nicht sämtlich in $\mathfrak{R}_0$ vollständig zerfallen, so enthält S ein fortschreitendes Teilsystem S', welches zu S äquivalent ist.*

Bilden wir nämlich ein Teilsystem S' von S in der Weise, daß wir die erste Funktion $f_0(x)$ dann in S' aufnehmen, wenn sie in $\mathfrak{R}_0$ nicht vollständig zerfällt, jede andere Funktion dann, wenn sie dem durch sie bestimmten Abschnitt von S nicht untergeordnet ist, so ist zunächst klar, daß die erste in $\mathfrak{R}_0$ nicht vollständig zerfallende Funktion aus S zu S' gehört, ferner daß das System S' fortschreitend und dem System S untergeordnet ist. Es ist also nur noch zu zeigen, daß jede Funktion aus $S = \{f_\nu(x)\}$ dem System S' untergeordnet ist. Dies ist zunächst bei $f_0(x)$ der Fall, da $f_0(x)$ entweder in $\mathfrak{R}_0$ vollständig zerfällt oder zu S' gehört. Um dasselbe für jede andere Funktion $f_\nu(x)$ zu zeigen, wenden wir die vollständige Induktion an. Dann ist als bewiesen zu erachten, daß der durch $f_\nu(x)$ bestimmte Abschnitt von S dem System S' untergeordnet ist. Ist

*) *E. Zermelo*, Math. Ann. Bd. 59 (1904), S. 514.

$f_\nu(x)$ diesem Abschnitt untergeordnet, so ist $f_\nu(x)$ auch S' untergeordnet; ist aber $f_\nu(x)$ dem bezeichneten Abschnitt nicht untergeordnet, so gehört $f_\nu(x)$ zu S', ist also ebenfalls diesem System untergeordnet.

Definition 2. *Fortschreitende Systeme von Elementen eines Erweiterungskörpers.* — Es sei $\mathfrak{k}_0$ ein beliebiger Körper, $\mathfrak{L}$ irgendeine Erweiterung von $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{S} = \{a_\nu\}$ ein wohlgeordnetes System von Elementen aus $\mathfrak{L}$. Das System $\mathfrak{S}$ soll ein *fortschreitendes* heißen, wenn weder a_0 dem Körper $\mathfrak{k}_0$, noch eins der übrigen Elemente a_ν dem Körper angehört, welcher aus $\mathfrak{k}_0$ durch Adjunktion des durch a_ν bestimmten Abschnittes hervorgeht. — Es gilt der Satz:

2. *Ist $\mathfrak{S} = \{a_\nu\}$ ein wohlgeordnetes System von Elementen eines Erweiterungskörpers $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{k}_0$ und gehören nicht alle Elemente aus $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{k}_0$, so enthält $\mathfrak{S}$ ein fortschreitendes Teilsystem $\mathfrak{S}'$, für welches $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}') = \mathfrak{k}(\mathfrak{S})$ wird. Man kann $\mathfrak{S}'$ in der Weise bilden, daß man das Element a_0 in $\mathfrak{S}'$ aufnimmt, wenn es nicht zu $\mathfrak{k}_0$ gehört, jedes andere Element a_ν dann, wenn es nicht dem Körper angehört, der aus $\mathfrak{k}_0$ durch Adjunktion des durch a_ν bestimmten Abschnittes von $\mathfrak{S}$ hervorgeht.*

Der Beweis ist dem des Satzes 1. ganz analog, kann also übergangen werden. Da $\mathfrak{L}$ selbst durch Adjunktion eines Systems $\mathfrak{S}$ erhalten werden kann und dieses wohlordnungsfähig ist, so folgt noch:

3. *Jede Erweiterung eines Körpers kann durch Adjunktion eines fortschreitenden Systems erhalten werden.*

Definition 3. *Wohlgeordnete Körper.* — Die Elemente eines Körpers $\mathfrak{k}_0$ können wir uns in eine wohlgeordnete Folge $\{c_\nu\}$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ gebracht denken. Bei dieser Anordnung kommt dann dem Körper $\mathfrak{k}_0$ eine bestimmte Ordnungszahl σ zu. *Wir wollen jedoch noch ausdrücklich die Festsetzung treffen, daß wenn von einem wohlgeordneten Körper $\mathfrak{k}_0 = \{c_\nu\}$ die Rede ist, stets $c_0 = 0$, $c_1 = \varepsilon$ sein soll.* Haben zwei wohlgeordnete Körper dieselbe Ordnungszahl, so besteht zwischen ihnen eine einzige wohlbestimmte ähnliche Beziehung (§ 19, 5.). Ist dieselbe zugleich eine isomorphe, so nennen wir die Körper *ähnlich-isomorph.*

4. *Ist $\{\mathfrak{k}_\mu\}$ $(0 \leqq \mu < \sigma)$ eine wohlgeordnete Folge wohlgeordneter Körper, σ Limeszahl und ist von je zwei Körpern dieser Folge der frühere allemal einem Abschnitt des späteren ähnlich-isomorph, so gibt es wohlgeordnete Körper $\mathfrak{L}$ von der Beschaffenheit, daß jeder Körper $\mathfrak{k}_\mu$ einem Abschnitt von $\mathfrak{L}$ ähnlich-isomorph ist und daß zu jedem Element von $\mathfrak{L}$ ein Abschnitt angegeben*

werden kann, welcher dieses Element enthält und einem Körper $\mathfrak{K}_\mu$ *ähnlich-isomorph ist. Alle Körper* $\mathfrak{L}$*, welche die bezeichneten Eigenschaften haben, sind einander ähnlich-isomorph.*

Beweis. Es habe der Körper $\mathfrak{K}_\mu$ der Folge $\{\mathfrak{K}_\mu\}$ die Ordnungszahl τ_μ, seine Elemente seien in ihrer wohlgeordneten Folge mit $c_{\mu\nu}$ $(0 \leqq \nu < \tau_\mu)$ bezeichnet. Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß die Zahlen τ_μ mit μ wachsen und daß keine größte unter ihnen ist. Wir bezeichnen mit τ die obere Grenze der Zahlen τ_μ (§ 19, 5.):

$$\tau = \lim_{\mu = \sigma} \tau_\mu$$

und nehmen ein wohlgeordnetes System $\mathfrak{L} = \{c_\lambda\}$ $(0 \leqq \lambda < \tau)$, für welches wir Addition und Multiplikation in der folgenden Weise festsetzen: Sind c_λ, $c_\varrho (\lambda \leqq \varrho)$ irgend zwei Elemente aus $\mathfrak{L}$, so folgt aus $\varrho < \tau$, daß es unter den Ordnungszahlen τ_μ der Körper $\mathfrak{K}_\mu$ solche gibt, die $> \varrho$ sind. Unter diesen sei $\tau_{\mu'}$ die kleinste. Der Körper $\mathfrak{K}_{\mu'} = \{c_{\mu'\nu}\}$ $(0 \leqq \nu < \tau_{\mu'})$ enthält dann zwei Elemente $c_{\mu'\lambda}$, $c_{\mu'\varrho}$ sowie ihre Summe und ihr Produkt. Ist

$$(1.) \qquad c_{\mu'\lambda} + c_{\mu'\varrho} = c_{\mu'\alpha}, \quad c_{\mu'\lambda} \cdot c_{\mu'\varrho} = c_{\mu'\beta},$$

so ist $\alpha < \tau_{\mu'} < \tau$, $\beta < \tau_{\mu'} < \tau$; das System $\mathfrak{L}$ enthält daher zwei Elemente c_α, c_β. *Wir setzen fest, daß*

$$(2.) \qquad c_\lambda + c_\varrho = c_\varrho + c_\lambda = c_\alpha, \quad c_\lambda \cdot c_\varrho = c_\varrho \cdot c_\lambda = c_\beta$$

sein soll, wodurch $\mathfrak{L}$ ein System mit doppelter Komposition wird.

Ist nun $\mathfrak{K}_\mu$ irgendein Körper der Folge $\{\mathfrak{K}_\mu\}$, so folgt aus $\tau_\mu < \tau$, daß $\mathfrak{L}$ einen Abschnitt $\mathfrak{L}_\mu$ von der Ordnungszahl τ_μ besitzt. In der ähnlichen Beziehung π_μ zwischen $\mathfrak{K}_\mu$ und $\mathfrak{L}_\mu$ entsprechen einander die Elemente $c_{\mu\lambda}$ und c_λ $(0 \leqq \lambda < \tau_\mu)$. Sind nun c_λ und c_ϱ $(\lambda \leqq \varrho)$ irgend zwei Elemente von $\mathfrak{L}_\mu$ und wird ihre Summe und ihr Produkt durch die Gleichungen (2.) angegeben, so ist $\varrho < \tau_\mu$ und daher, wenn wieder $\tau_{\mu'}$ die kleinste Zahl aus der Folge $\{\tau_\mu\}$ ist, welche ϱ übertrifft,

$$(3.) \qquad \tau_{\mu'} \leqq \tau_\mu, \quad \mu' \leqq \mu.$$

Aus den für die Kompositionen in $\mathfrak{L}$ getroffenen Festsetzungen ergibt sich, daß die Gleichungen (2.) die Gleichungen (1.) nach sich ziehen. Aus

(3.) folgt, daß $\mathfrak{K}_{\mu'}$ entweder mit $\mathfrak{K}_\mu$ identisch oder einem Abschnitt von $\mathfrak{K}_\mu$ ähnlich-isomorph ist. In beiden Fällen folgt aus (1.)

$$(4.) \qquad c_{\mu\lambda}+c_{\mu\varrho}=c_{\mu\alpha}, \quad c_{\mu\lambda}\cdot c_{\mu\varrho}=c_{\mu\beta}.$$

Da die Elemente $c_{\mu\alpha}$, $c_{\mu\beta}$ wieder dem Körper $\mathfrak{K}_\mu$ angehören, so ist $\alpha<\tau_\mu$, $\beta<\tau_\mu$, die Elemente c_α, c_β gehören also wieder dem Abschnitt $\mathfrak{L}_\mu$ von $\mathfrak{L}$ an. Ferner zeigt die Vergleichung von (2.) und (4.), daß die ähnliche Beziehung π_μ zwischen $\mathfrak{K}_\mu$ und $\mathfrak{L}_\mu$ eine isomorphe ist. $\mathfrak{L}_\mu$ stellt also einen zu $\mathfrak{K}_\mu$ ähnlich-isomorphen Körper dar. Da für jedes Element c_λ von $\mathfrak{L}$ $\tau_\mu>\lambda$ bestimmbar ist, so kommt jedes Element von $\mathfrak{L}$ in einem Körper $\mathfrak{L}_\mu$ vor, und da von je zweien dieser Körper einer den andern enthält, so ist $\mathfrak{L}$ selbst ein Körper. Derselbe entspricht, wie sich zeigte, den Bedingungen des Satzes 4.

Ist $\mathfrak{L}'=\{c'_\lambda\}$ ebenfalls ein Körper, welcher diesen Bedingungen entspricht, τ' seine Ordnungszahl, $\mathfrak{L}'_\mu$ der zu $\mathfrak{K}_\mu$ ähnlich-isomorphe Abschnitt, so ist die Ordnungszahl von $\mathfrak{L}'_\mu$ gleich τ_μ, also $\tau_\mu<\tau'$. Ist andererseits λ irgendeine Ordnungszahl $<\tau'$, so enthält $\mathfrak{L}'$ ein Element c'_λ; dieses kommt in einem Abschnitt $\mathfrak{L}'_\mu$ vor, es ist also $\lambda<\tau_\mu$. Mithin ist $\tau'=\lim\limits_{\mu=\sigma} \tau_\mu=\tau$, und es besteht zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ eine ähnliche Beziehung π, welche jedem Element c_λ von $\mathfrak{L}$ das Element c'_λ von $\mathfrak{L}'$ zuweist. Bestehen nun für irgend zwei Elemente c_λ, c_ϱ $(\lambda\leqq\varrho)$ von $\mathfrak{L}$ die Kompositionsgleichungen (2.) und bestimmt man μ so groß, daß $\tau_\mu>\varrho$ wird, so enthält der Körper $\mathfrak{L}_\mu$ die Elemente c_λ, c_ϱ, also auch c_α und c_β. Die Körper $\mathfrak{L}_\mu$ und $\mathfrak{L}'_\mu$ sind zu $\mathfrak{K}_\mu$, also auch zueinander ähnlich-isomorph. Durch die ähnliche Beziehung zwischen $\mathfrak{L}_\mu$ und $\mathfrak{L}_{\mu'}$ werden aber den Elementen c_λ, c_ϱ, c_α, c_β von $\mathfrak{L}_\mu$ die Elemente c'_λ, c'_ϱ, c'_α, c'_β von $\mathfrak{L}'_\mu$ zugeordnet. Da diese Beziehung zugleich isomorph ist, so folgt

$$c'_\lambda+c'_\varrho=c'_\alpha, \quad c'_\lambda\cdot c'_\varrho=c'_\beta,$$

also erweist sich auch die ähnliche Beziehung π, welche zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ besteht, als eine isomorphe, womit (4.) vollständig bewiesen ist.

Definition 4. *Wohlordnung der ganzen Funktionen in einem wohlgeordneten Körper.* — Ist $\mathfrak{K}_0=\{c_\nu\}$ $(c_0=0,\ c_1=\varepsilon)$ ein wohlgeordneter Körper und sind $g(x)$ und $h(x)$ zwei voneinander verschiedene ganze Funktionen aus $\mathfrak{K}_0$, so denken wir uns diese in Form unendlicher Reihen

$$g(x)=c_{\mu_0}+c_{\mu_1}x+c_{\mu_2}x^2+\cdots,$$
$$h(x)=c_{\nu_0}+c_{\nu_1}x+c_{\nu_2}x^2+\cdots$$

geschrieben. Dann wird, sobald die natürliche Zahl n einen gewissen Wert überschreitet,

$$c_{\mu_n}=c_{\nu_n}=0=c_0, \quad \mu_n=\nu_n=0$$

sein. *Ist* k $(\geqq 0)$ *die größte Zahl, für welche* $\mu_k \neq \nu_k$ *ist, so sagen wir im Falle* $\mu_k < \nu_k$, *daß die Funktion* $g(x)$ *innerhalb* $\Re_0$ *der Funktion* $h(x)$ *vorangeht.* Durch diese Festsetzung wird das System der ganzen Funktionen aus $\Re_0$ in ein wohlgeordnetes verwandelt. Ist nämlich S ein beliebiges System ganzer Funktionen aus $\Re_0$, so werden, weil $c_0=0$ ist, in S die Funktionen kleinsten Grades den andern vorangehen. Ist n dieser Grad, S_n das Teilsystem von S, welches die Funktionen n-ten Grades umfaßt, S_{n-1} das System der Funktionen aus S_n, in denen der Koeffizient c_ν von x^n einen möglichst kleinen Index ν hat, S_{n-2} das System derjenigen Funktionen aus S_{n-1}, in denen der Koeffizient von x^{n-1} einen möglichst kleinen Index hat u. s. f., endlich $f(x)$ diejenige Funktion aus S_0, in welcher das von x freie Glied einen möglichst kleinen Index hat, so ist $f(x)$ die erste Funktion aus S. Mit der Existenz einer ersten Funktion innerhalb jedes Funktionensystems S ist aber die behauptete Wohlordnung bewiesen.

Definition 5. *Primitive Wohlordnung.* — Es sei $\Re_0=\{c_\nu\}$ ein wohlgeordneter Körper, $\Re_1$ eine einfache algebraische Erweiterung n-ten Grades $(n>1)$ von $\Re_0$, j ein primitives Element von $\Re_1$. Jedes Element von $\Re_1$ wird dann eindeutig in der Form $g(j)$ dargestellt, wenn $g(x)$ jede beliebige ganze Funktion aus $\Re_0$, deren Grad $<n$ ist, bezeichnet. Setzen wir für irgend zwei Elemente $g(j)$ und $h(j)$ fest, daß $g(j)$ als das frühere gilt, falls die Funktion $g(x)$ innerhalb $\Re_0$ der Funktion $h(x)$ vorangeht, so ist nach den letzten Ausführungen klar, daß dadurch $\Re_1$ zu einem wohlgeordneten Körper gemacht wird. Aus $c_0=0$ folgt, daß der wohlgeordnete Körper $\Re_0$ einen Abschnitt des wohlgeordneten Körpers $\Re_1$ darstellt; aus $c_1=\varepsilon$, daß j das erste auf den Abschnitt $\Re_0$ folgende Element ist. Wir sagen: $\Re_1$ *ist in bezug auf* $\Re_0$ *primitiv geordnet* und nennen j das *Hauptelement* der primitiven Wohlordnung. — Es besteht dann der Satz:

5. *Ist* $\Re_1$ *eine einfache algebraische Erweiterung eines wohlgeordneten Körpers* $\Re_0$, j *ein primitives Element, so kann* $\Re_1$ *auf eine und nur eine*

Weise so primitiv in bezug auf auf $\mathfrak{K}_0$ geordnet werden, daß j Hauptelement wird. $\mathfrak{K}_0$ ist dann der durch j bestimmte Abschnitt von $\mathfrak{K}_1$.

Definition 6. *Reguläre Wohlordnung.* — Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein wohlgeordneter Körper, $\mathfrak{L}$ eine beliebige algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}_0$. Wir wollen annehmen, daß auch $\mathfrak{L}$ wohlgeordnet sei, und daß diese Wohlordnung die im folgenden beschriebenen Eigenschaften besitze: Sowohl der Körper $\mathfrak{K}_0$ als auch jeder Körper, der aus $\mathfrak{K}_0$ durch Adjunktion eines Abschnittes von $\mathfrak{L}$ hervorgeht, soll, sofern er nicht alle Elemente von $\mathfrak{L}$ umfaßt, ein *Abschnitt* von $\mathfrak{L}$ sein. Die so erhaltenen Abschnitte von $\mathfrak{L}$ — es sind dies offenbar alle diejenigen $\mathfrak{K}_0$ enthaltenden Abschnitte, welche zugleich Körper sind — mögen *Hauptabschnitte* heißen; das auf einen Hauptabschnitt unmittelbar folgende Element nennen wir (*das zugehörige*) *Hauptelement*. Die Hauptelemente bilden eine (wohlgeordnete) Teilmenge $\mathfrak{J} = \{j_\nu\}$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ von $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{K}_0$ ist der durch j_0 bestimmte Hauptabschnitt; wir wollen allgemein mit $\mathfrak{K}_\nu$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ den durch j_ν bestimmten Hauptabschnitt, mit $\mathfrak{K}_\sigma$ den Körper $\mathfrak{L}$ selbst bezeichnen. — Aus den bisherigen Voraussetzungen folgt, daß jeder Körper $\mathfrak{K}_\nu(j_\nu)$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ ebenfalls einen Hauptabschnitt darstellt (bzw. gleich $\mathfrak{K}_\sigma = \mathfrak{L}$ ist). Wir machen nun die weitere Voraussetzung, daß sich $\mathfrak{K}_\nu(j_\nu)$ als in bezug auf $\mathfrak{K}_\nu$ primitiv geordnet erweist. Dabei wird also j_ν als Hauptelement der primitiven Ordnung erscheinen. — Besitzt der wohlgeordnete Körper $\mathfrak{L}$ alle diese Eigenschaften, so nennen wir ihn *in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär geordnet.* — Die primitive Wohlordnung stellt hiernach den einfachsten Fall der regulären dar, charakterisiert durch $\sigma = 1$.

Aus den vorstehenden Erklärungen ergeben sich einige Tatsachen unmittelbar, die wir deshalb ohne Beweis verzeichnen, nämlich:

6. *Ist der Körper $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}_\sigma$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär geordnet und stellt $\mathfrak{K}_\nu$ $(0 < \nu < \sigma)$ einen Hauptabschnitt dar, so ist sowohl $\mathfrak{K}_\nu$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ als auch $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_\nu$ regulär geordnet. Ist hierbei $\mathfrak{J} = \{j_\mu\}$ $(0 \leqq \mu < \sigma)$ das System der Hauptelemente von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{J}'$ der durch j_ν bestimmte Abschnitt von $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}''$ der zugehörige Rest, so stellt $\mathfrak{J}'$ das System der Hauptelemente von $\mathfrak{K}_\nu$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{J}''$ das System der Hauptelemente von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_\nu$ dar.*

7. *Ist $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}$ regulär geordnet, so ist $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär geordnet und $\mathfrak{L}$ ein Hauptabschnitt von $\mathfrak{M}$.*

Behalten wir die Bezeichnungen aus Def. 6. bei und verstehen wir unter $\mathfrak{L}'$ irgendeinen Körper zwischen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{L}$. Es sei $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{L}$ verschieden, a das erste nicht zu $\mathfrak{L}'$ gehörige Element von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$ der durch a bestimmte Abschnitt von $\mathfrak{L}$. Dann enthält $\mathfrak{L}'$ den Körper $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A})$, welcher zufolge Def. 6. Hauptabschnitt von $\mathfrak{L}$ ist. Da aber $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A})$ den Abschnitt $\mathfrak{A}$, nicht aber das auf diesen folgende Element a enthält, so muß a Hauptelement sein. Soll daher $\mathfrak{L}'$ alle Hauptelemente enthalten, so muß $\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}$ sein, und somit folgt $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J})=\mathfrak{L}$. Bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{J}_\nu$ $(0<\nu<\sigma)$ den durch das Hauptelement j_ν bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{J}$ und setzen wir $\mathfrak{L}'=\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_\nu)$, so ist $\mathfrak{L}'$ Teil von $\mathfrak{K}_\nu$, da $\mathfrak{K}_\nu$ das System $\mathfrak{J}_\nu$ enthält. Da ferner j_ν in $\mathfrak{K}_\nu$, also auch in $\mathfrak{L}'$ nicht vorkommt und das erste in $\mathfrak{L}'$ nicht enthaltene Element a von $\mathfrak{L}$ Hauptelement sein muß, so folgt $a=j_\nu$, $\mathfrak{L}'=\mathfrak{K}_\nu=\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_\nu)$. Unter Berücksichtigung von Def. 2. ergibt sich somit:

8. *Ist der Körper $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär geordnet, so bilden die Hauptelemente ein fortschreitendes System $\mathfrak{J}$, es ist $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J})$, und der durch das Hauptelement j_ν bestimmte Hauptabschnitt von $\mathfrak{L}$ wird aus $\mathfrak{K}_0$ durch Adjunktion des durch j_ν bestimmten Abschnittes von $\mathfrak{J}$ erhalten.*

Es sei unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung a irgendein Element von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}_\nu$ $(0\leqq\nu\leqq\sigma)$ der erste a enthaltende Hauptabschnitt von $\mathfrak{L}$, bzw., wenn kein solcher vorhanden, der Körper $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}_\sigma$ selbst. Ist $\nu>0$, so folgt aus $\mathfrak{K}_\nu=\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_\nu)$, daß es ein endliches Teilsystem $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{J}_\nu$ geben muß derart, daß das Element a auch in $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{S})$ vorkommt. Ist j_μ das letzte Element von $\mathfrak{S}$, so ist $\mu<\nu$. Es kann ferner keine Ordnungszahl ϱ geben, für welche $\mu<\varrho<\nu$ wird. Andernfalls wäre $\mathfrak{S}$ Teil von $\mathfrak{J}_\varrho$ und a ein Element von $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_\varrho)=\mathfrak{K}_\varrho$ gegen die über $\mathfrak{K}_\nu$ gemachte Annahme. Mithin ist $\nu=\mu+1$, und wir haben den Satz:

9. *Ist $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ $(0\leqq\nu<\sigma)$ das System der Hauptabschnitte des in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär geordneten Körpers $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}_\sigma$ und $\mathfrak{K}_\nu$ der erste Körper aus der Folge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ $(0\leqq\nu\leqq\sigma)$, welcher ein beliebig gegebenes Element a aus $\mathfrak{L}$ enthält, so kann ν nicht Limeszahl sein.*

Hieraus ergibt sich leicht:

10. *Die reguläre Wohlordnung eines Körpers $\mathfrak{L}$ ist durch die Wohlordnung des Grundkörpers $\mathfrak{K}_0$ und das wohlgeordnete System $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_\sigma=\{j_\nu\}$ $(0\leqq\nu<\sigma)$ der Hauptelemente vollständig bestimmt.*

Nehmen wir nämlich an, wir hätten zwei verschiedene reguläre Wohlordnungen von $\mathfrak{L}$. Bezeichnen wir diese mit $\mathfrak{L}' = \{c_\lambda'\}$ und $\mathfrak{L}'' = \{c_\lambda''\}$, mit $\mathfrak{K}_\nu', \mathfrak{K}_\nu''$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ ihre Hauptabschnitte, welche den Abschnitten $\mathfrak{J}_\nu$ des Systems $\mathfrak{J}$ entsprechen, und setzen wir $\mathfrak{L}' = \mathfrak{K}_\sigma'$, $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{K}_\sigma''$. Dann sind die Körper $\mathfrak{K}_\nu'$, $\mathfrak{K}_\nu''$, wenn man von der Reihenfolge der Elemente absieht, natürlich identisch, nämlich gleich $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_\nu)$. Drückt man aber durch das Gleichheitszeichen auch Übereinstimmung in der Anordnung aus, so ist jedenfalls $\mathfrak{K}_\sigma' \neq \mathfrak{K}_\sigma''$, während $\mathfrak{K}_0' = \mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_0''$ ist. Es sei nun c_λ' das erste Element aus $\mathfrak{L}'$, welches innerhalb $\mathfrak{L}''$ nicht mehr denselben Index hat, $\mathfrak{K}_\nu'$ der erste Körper der Folge $\{\mathfrak{K}_\nu'\}$ $(0 < \nu \leqq \sigma)$, welcher das Element c_λ' enthält. Dann ist $\nu > 0$, und ν ist nach 9. keine Limeszahl. Es wird $\mathfrak{K}_\nu' \neq \mathfrak{K}_\nu''$, hingegen $\mathfrak{K}_{\nu-1}' = \mathfrak{K}_{\nu-1}''$. Da aber nach den Vorschriften der regulären Wohlordnung $\mathfrak{K}_\nu' = \mathfrak{K}_{\nu-1}'(j_{\nu-1})$ in bezug auf $\mathfrak{K}_{\nu-1}'$, $\mathfrak{K}_\nu'' = \mathfrak{K}_{\nu-1}''(j_{\nu-1})$ in bezug auf $\mathfrak{K}_{\nu-1}'' = \mathfrak{K}_{\nu-1}'$ primitiv geordnet sein muß und in beiden Fällen $j_{\nu-1}$ Hauptelement ist, so folgt aus 5. $\mathfrak{K}_\nu' = \mathfrak{K}_\nu''$, und wir erhalten einen Widerspruch. Somit ist 10. bewiesen.

11. *Ist $\mathfrak{L}$ eine algebraische Erweiterung des wohlgeordneten Körpers $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\sigma = \{j_\nu\}$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ ein fortschreitendes System von Elementen aus $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}) = \mathfrak{L}$, so gibt es eine und nur eine reguläre Wohlordnung von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{J}$ als Hauptelementensystem.*

Daß es nicht mehr als eine Wohlordnung der bezeichneten Art geben kann, besagt schon Satz 10. Daß es überhaupt eine gibt, drückt im Falle $\sigma = 1$ der Satz 5. aus. Für $\sigma > 1$ führen wir den Beweis durch Induktion. — Ist σ keine Limeszahl, so ordnen wir zunächst den Körper $\mathfrak{K}_{\sigma-1} = \mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_{\sigma-1})$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär und so, daß $\mathfrak{J}_{\sigma-1}$ das System der Hauptelemente wird; sodann ordnen wir $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}) = \mathfrak{K}_{\sigma-1}(j_{\sigma-1})$ in bezug auf $\mathfrak{K}_{\sigma-1}$ primitiv, mit $j_{\sigma-1}$ als Hauptelement. Der so geordnete Körper $\mathfrak{L}$ genügt dann nach 6., 7. den Bedingungen der Aufgabe. — Ist σ Limeszahl, so haben wir zunächst für jedes $\nu < \sigma$ einen Körper $\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_\nu)$, der in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär geordnet ist und das Hauptelementensystem $\mathfrak{J}_\nu$ hat. Ist $\mu < \nu < \sigma$, so tritt der Körper $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_\mu)$ als Hauptabschnitt von $\mathfrak{K}_\nu$ auf, ist nach 6., 7. in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär geordnet und hat das Hauptelementensystem $\mathfrak{J}_\mu$. Nach 10. stimmt der genannte Abschnitt auch in der Reihenfolge der Elemente mit $\mathfrak{K}_\mu$ überein. Von den Körpern der Folge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ ist also jeder Abschnitt aller späteren. Hieraus, und weil

die Folge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ keinen letzten Körper enthält, ist sofort zu ersehen, daß diese Körper in ihrer Gesamtheit einen wohlgeordneten Körper $\mathfrak{L}'$ konstituieren, von dem sie sämtlich Abschnitte sind. Da $\mathfrak{J}$ kein letztes Element enthält, so kommt jedes Element von $\mathfrak{J}$ in einem Abschnitt $\mathfrak{J}_\nu$, also in einem Körper $\mathfrak{K}_\nu$, mithin in $\mathfrak{L}'$ vor; $\mathfrak{L}'$ umfaßt daher alle Elemente von $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J})=\mathfrak{L}$, stellt also eine Wohlordnung des Körpers $\mathfrak{L}$ dar. Ist $\mathfrak{A}$ irgendein Abschnitt von $\mathfrak{L}'$, a das auf diesen Abschnitt folgende Element von $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{K}_\nu$ ein a enthaltender Körper aus der Folge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$, so ist $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{A})$ Hauptabschnitt von $\mathfrak{K}_\nu$, also ein Körper $\mathfrak{K}_\mu$ $(\mu<\nu)$. Durch Adjunktion eines Abschnittes von $\mathfrak{L}'$ geht also aus $\mathfrak{K}_0$ immer wieder ein Abschnitt von $\mathfrak{L}'$ hervor, und die so erhaltenen Abschnitte sind die Körper der Folge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ $(0\leqq\nu<\sigma)$. Diese bilden also die einzigen Hauptabschnitte von $\mathfrak{L}'$, die Elemente aus $\mathfrak{J}$, da sie auf diese Abschnitte folgen, die Hauptelemente. Da keins von ihnen letztes ist, so ist $\mathfrak{K}_\nu(j_\nu)$ allemal wieder Körper der Folge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ $(0\leqq\nu<\sigma)$, als solcher in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär, also in bezug auf $\mathfrak{K}_\nu$ primitiv geordnet. Somit stellt $\mathfrak{L}'$ eine reguläre Wohlordnung von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ dar, mit $\mathfrak{J}$ als Hauptelementensystem.

Aus 11. ergibt sich in Verbindung mit 3.:

12. *Jede algebraische Erweiterung eines wohlgeordneten Körpers kann in bezug auf diesen regulär geordnet werden.*

§ 21.

Der Fundamentalsatz der algebraischen Erweiterungen.

Definition 1. *Hauptfunktionen und Hauptfaktoren der regulären Wohlordnung.* — Es sei $\mathfrak{N}=\mathfrak{K}_\sigma$ eine algebraische Erweiterung des wohlgeordneten Körpers $\mathfrak{K}_0$ und in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär geordnet, $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_\sigma=\{j_\nu\}$ $(0\leqq\nu<\sigma)$ das System der Hauptelemente, $\mathfrak{K}_\nu$ bzw. $\mathfrak{J}_\nu$ der durch j_ν bestimmte Hauptabschnitt von $\mathfrak{N}$ bzw. Abschnitt von $\mathfrak{J}$. Das Element j_ν ist Nullstelle einer bestimmten irreduziblen Funktion $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{K}_0$ (mit ε als Koeffizient der höchsten Potenz), ebenso Nullstelle einer bestimmten irreduziblen Funktion $\varphi_\nu(x)$ des Körpers $\mathfrak{K}_\nu$, welche gleich $f_\nu(x)$ sein kann und für $\nu=0$ stets gleich $f_\nu(x)$, in jedem Falle aber ein Faktor von $f_\nu(x)$ ist. Wir gelangen so zu zwei Funktionensystemen

$$F_\sigma=F=\{f_\nu(x)\},\quad \Phi_\sigma=\Phi=\{\varphi_\nu(x)\}\qquad(0\leqq\nu<\sigma).$$

Wir nennen die Funktionen $f_\nu(x)$ *Hauptfunktionen*, die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ *Hauptfaktoren der regulären Wohlordnung* und bezeichnen den durch $f_\nu(x)$ bzw. $\varphi_\nu(x)$ $(\nu \geqq 1)$ bestimmten Abschnitt von F bzw. Φ mit F_ν bzw. Φ_ν.*) — Unter Bezugnahme auf diese Bezeichnung ergibt sich nun leicht:

1. *Sind sämtliche Hauptfunktionen normal* (in bezug auf $\mathfrak{K}_0$), *so ist der regulär geordnete Körper* $\mathfrak{N} = \mathfrak{K}_\sigma$ *selbst normal. Er ist gerade hinreichend groß, um das System* F *der Hauptfunktionen vollständig zu zerfällen; ebenso ist jeder Hauptabschnitt* $\mathfrak{K}_\nu$ *normal und reicht zur Zerfällung von* F_ν *gerade hin. Das System* F *ist fortschreitend.*

Da nämlich jede der Normalfunktionen $f_\varrho(x)$ $(0 \leqq \varrho < \nu)$ aus F_ν $(0 < \nu \leqq \sigma)$ im Körper $\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_\nu)$ eine Nullstelle j_ϱ besitzt, so muß sie in $\mathfrak{K}_\nu$ vollständig zerfallen, und da der Körper $\mathfrak{K}_\nu$ aus $\mathfrak{K}_0$ nur durch Adjunktion von Nullstellen der Funktionen aus F_ν hervorgeht, so reicht er zur Zerfällung von F_ν gerade hin, ist also normal. Da ferner im Falle $\nu < \sigma$ $\mathfrak{K}_\nu$ das Element j_ν nicht mehr enthält, die Funktion $f_\nu(x)$ in $\mathfrak{K}_\nu$ also nicht vollständig zerfällt, so ist F ein fortschreitendes System.

Definition 2. *Normale Wohlordnung.* — Es bezeichne $\mathfrak{N}$ eine normale Erweiterung des wohlgeordneten Körpers $\mathfrak{K}_0$; $\mathfrak{N}$ sei in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ regulär geordnet, die Hauptfunktionen seien sämtlich normal. Verwenden wir die Buchstaben in derselben Bedeutung wie vorher, so ist j_ν $(0 \leqq \nu < \sigma)$ Nullstelle der irreduziblen Funktion $\varphi_\nu(x)$ aus $\mathfrak{K}_\nu$ und $\varphi_\nu(x)$ Faktor der in $\mathfrak{K}_0$ irreduziblen Funktion $f_\nu(x)$. Da $\mathfrak{K}_\nu$ ein wohlgeordneter Körper ist, so kommt auf Grund von Def. 4., § 20 auch den Funktionen innerhalb $\mathfrak{K}_\nu$ eine bestimmte Anordnung zu. Dies gilt also auch von den irreduziblen Faktoren, welche $f_\nu(x)$ innerhalb $\mathfrak{K}_\nu$ besitzt. Wir wollen nun annehmen, daß jede Funktion $\varphi_\nu(x)$, sofern sie nicht einziger irreduzibler Faktor von $f_\nu(x)$ innerhalb $\mathfrak{K}_\nu$ ist, den übrigen irreduziblen Faktoren von $f_\nu(x)$ innerhalb $\mathfrak{K}_\nu$ vorangeht. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so sagen wir: $\mathfrak{N}$ *ist in bezug auf* $\mathfrak{K}_0$ *normal geordnet.* Die normale Wohlordnung ist also ein spezieller Fall der regulären.

---

*) Um Mißverständnisse zu vermeiden, weisen wir noch darauf hin, daß den Funktionen $f_\nu(x)$ innerhalb F eine bestimmte (durch den Index bezeichnete) Reihenfolge zukommt, die natürlich nichts mit der Reihenfolge zu tun hat, welche den Funktionen auf Grund von § 20, Def. 4. in $\mathfrak{K}_0$ erteilt wurde.

Definition 3. *Ausgezeichnete Nullstellen der Hauptfunktionen, die zu einer normalen Wohlordnung gehören.* — Es sei $\mathfrak{R}$ eine normale und normal geordnete Erweiterung des wohlgeordneten Körpers $\mathfrak{K}_0$, und es mögen die bisher gebrauchten Zeichen ihre Bedeutung beibehalten. Da die Hauptfunktion $f_\nu(x)$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ normal ist, so kann der Körper $\mathfrak{K}_\nu(j_\nu)$ erhalten werden, indem man $\mathfrak{K}_\nu$ irgendeine Nullstelle von $f_\nu(x)$ adjungiert. Alle diese Nullstellen sind primitive Elemente des Körpers $\mathfrak{K}_\nu(j_\nu)$ in bezug auf $\mathfrak{K}_\nu$, ihr Grad ist gleich dem Grade des Hauptfaktors $\varphi_\nu(x)$, welcher jedenfalls größer als 1 ist. Im Falle unvollkommener Körper brauchen die Nullstellen von $\varphi_\nu(x)$ nicht alle verschieden zu sein. Nehmen wir also an, $\varphi_\nu(x)$ habe r verschiedene Nullstellen $j_\nu, j_\nu', \ldots j_\nu^{(r-1)}$ und sei vom Grade n, so ist $n \geqq r \geqq 1, n > 1$. Ist nun i_ν irgendeine Nullstelle von $f_\nu(x)$ (im Körper $\mathfrak{R}$), so erhalten wir sämtliche Elemente des Körpers $\mathfrak{K}_\nu(j_\nu)$, indem wir in sämtlichen ganzen Funktionen $g(x)$ aus $\mathfrak{K}_\nu$, deren Grad kleiner als n ist, x durch i_ν ersetzen. Unter diesen Funktionen gibt es also r, welche für $x = i_\nu$ in Nullstellen von $\varphi_\nu(x)$ übergehen. Diesen r Funktionen kommt nach Def. 4., § 20 innerhalb $\mathfrak{K}_\nu$ eine bestimmte Reihenfolge zu. Ist $\psi(x)$ die erste unter ihnen und ist $\psi(i_\nu) = j_\nu$, so nennen wir i_ν eine *ausgezeichnete Nullstelle von* $f_\nu(x)$. (Diese Bezeichnung gebrauchen wir auch, wenn $r = 1$ ist, was nur bei unvollkommenen Körpern vorkommen kann.) Es gilt der Satz:

2. *Das Hauptelement j_ν ist ausgezeichnete Nullstelle von $f_\nu(x)$, und unter den Nullstellen des Hauptfaktors $\varphi_\nu(x)$ gibt es sonst keine ausgezeichnete.*

Da nämlich die Nullstellen $j_\nu, j_\nu', \ldots j_\nu^{(r-1)}$ von $\varphi_\nu(x)$ in $\mathfrak{K}_\nu$ nicht vorkommen, so sind die r Funktionen aus $\mathfrak{K}_\nu$, welche für $x = i_\nu$ in diese Nullstellen übergehen, alle wenigstens vom Grade 1. Aus dem Umstande, daß der wohlgeordnete Körper $\mathfrak{K}_\nu$ mit den Elementen $0, \varepsilon$ beginnt, folgt, daß unter allen Funktionen aus $\mathfrak{K}_\nu$, deren Grad $\geqq 1$ ist, x die erste ist. Wählen wir also für i_ν eine der Nullstellen von $\varphi_\nu(x)$, so ist x die erste Funktion aus $\mathfrak{K}_\nu$, welche für $x = i_\nu$ in eine Nullstelle von $\varphi_\nu(x)$ übergeht. Diese ist aber dann und nur dann gleich j_ν, wenn wir $i_\nu = j_\nu$ wählen, womit die Behauptung erwiesen ist. — Aus 2. ergibt sich noch:

3. *Im Falle $\varphi_\nu(x) = f_\nu(x)$, also jedenfalls für $\nu = 0$, ist j_ν die einzige ausgezeichnete Nullstelle von $f_\nu(x)$.*

Nunmehr beweisen wir:

4. *Ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{k}(\bar{\mathfrak{J}})$ normale Erweiterung des wohlgeordneten Körpers $\mathfrak{k}_0$, ist jedes Element i_ν des Systems $\bar{\mathfrak{J}}_\sigma = \bar{\mathfrak{J}} = \{i_\nu\}$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ Nullstelle einer Normalfunktion $f_\nu(x)$ aus $\mathfrak{k}_0$ und ist das Funktionensystem $F_\sigma = F = \{f_\nu(x)\}$ ein fortschreitendes (oder, was hier dasselbe besagt: ist das System $\bar{\mathfrak{J}}$ ein fortschreitendes), so kann der Körper $\mathfrak{N}$ auf eine und nur eine Weise in bezug auf $\mathfrak{k}_0$ derartig normal geordnet werden, daß F das System der Hauptfunktionen darstellt und die Elemente i_ν ausgezeichnete Nullstellen der zugehörigen Hauptfunktionen $f_\nu(x)$ werden.*

Wir zeigen zunächst, daß es nicht zwei verschiedene Normalordnungen der bezeichneten Art geben kann. Nehmen wir an, es lägen zwei solche Normalordnungen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ des Körpers $\mathfrak{N}$ vor. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{J}'_\sigma = \mathfrak{J}' = \{j'_\nu\}$, $\{\mathfrak{k}'_\nu\}$, $\boldsymbol{\Phi}'_\sigma = \boldsymbol{\Phi}' = \{\varphi'_\nu(x)\}$ die Systeme der Hauptelemente, Hauptabschnitte, Hauptfaktoren von $\mathfrak{N}'$, mit $\mathfrak{J}''_\sigma = \mathfrak{J}'' = \{j''_\nu\}$, $\{\mathfrak{k}''_\nu\}$, $\boldsymbol{\Phi}''_\sigma = \boldsymbol{\Phi}'' = \{\varphi''_\nu(x)\}$ die entsprechenden Systeme für $\mathfrak{N}''$. Mit $\bar{\mathfrak{J}}_\nu$, F_ν, $\mathfrak{J}'_\nu$, $\mathfrak{J}''_\nu$, $\boldsymbol{\Phi}'_\nu$, $\boldsymbol{\Phi}''_\nu$ seien die durch i_ν, $f_\nu(x)$ u. s. f. bestimmten Abschnitte von $\bar{\mathfrak{J}}$, F u. s. f. bezeichnet. Dann stellen $\mathfrak{k}'_\nu, \mathfrak{k}''_\nu$ zwei Normalordnungen desselben Körpers $\mathfrak{k}_0(\bar{\mathfrak{J}}_\nu) = \mathfrak{k}_0(\mathfrak{J}'_\nu) = \mathfrak{k}_0(\mathfrak{J}''_\nu)$ dar, welcher zur Zerfällung des Systems F_ν gerade ausreicht. Da i_0 ausgezeichnetes Element von $f_0(x)$ sein soll, so ist nach 3. $j'_0 = i_0 = j''_0$. Wenn die Gleichung $j'_\nu = j''_\nu$ nicht für jeden Index besteht, so nehmen wir den kleinsten, für welchen $j'_\nu \neq j''_\nu$ ist. Dann ist $\mathfrak{J}'_\nu = \mathfrak{J}''_\nu$, und da $\mathfrak{J}'_\nu$ und $\mathfrak{J}''_\nu$ die Systeme der Hauptelemente der in bezug auf $\mathfrak{k}_0$ regulär geordneten Körper $\mathfrak{k}'_\nu$, $\mathfrak{k}''_\nu$ darstellen, so ist (auch unter Berücksichtigung der Anordnung) $\mathfrak{k}'_\nu = \mathfrak{k}''_\nu$ (§ 20, 10.). Hieraus folgt weiter $\varphi'_\nu(x) = \varphi''_\nu(x)$, weil $\varphi'_\nu(x)$ bzw. $\varphi''_\nu(x)$ den ersten irreduziblen Faktor von $f'_\nu(x)$ innerhalb $\mathfrak{k}'_\nu = \mathfrak{k}''_\nu$ darstellt. Ist ferner innerhalb $\mathfrak{k}'_\nu = \mathfrak{k}''_\nu$ $\psi(x)$ die erste Funktion, welche für $x = i_\nu$ Nullstelle von $\varphi'_\nu(x) = \varphi''_\nu(x)$ wird, so erhalten wir, weil i_ν ausgezeichnete Nullstelle von $f_\nu(x)$ sein soll, $j_\nu = \psi(i_\nu) = j''_\nu$, im Widerspruch mit der Annahme $j'_\nu \neq j''_\nu$. Mithin ist $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}''$, und daraus folgt nach § 20, 10. $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}''$.

Wir haben jetzt zu zeigen, daß eine Normalordnung der verlangten Art existiert. — Für $\sigma = 1$ erhalten wir dieselbe, indem wir $\mathfrak{N}$ in bezug auf $\mathfrak{k}_0$ primitiv mit i_0 als Hauptelement ordnen. Für $\sigma > 1$ ist der Beweis durch Induktion zu führen. Ist σ keine Limeszahl, so bezeichne $\mathfrak{k}_{\sigma-1}$ diejenige Normalordnung des Körpers $\mathfrak{k}_0(\bar{\mathfrak{J}}_{\sigma-1})$, für welche $F_{\sigma-1}$ das System der Hauptfunktionen darstellt und jedes Element i_ν $(\nu < \sigma - 1)$

ausgezeichnete Nullstelle von $f_\nu(x)$ wird. Ist dann innerhalb des wohlgeordneten Körpers $\mathfrak{K}_{\sigma-1}$ $\varphi_{\sigma-1}(x)$ der erste irreduzible Faktor von $f_{\sigma-1}(x)$, $\psi(x)$ die erste Funktion, welche für $x=i_{\sigma-1}$ zu einer Nullstelle von $\varphi_{\sigma-1}(x)$ wird, so setzen wir $\psi(i_{\sigma-1})=j_{\sigma-1}$ und ordnen $\mathfrak{R}$ primitiv in bezug auf $\mathfrak{K}_{\sigma-1}$ mit $j_{\sigma-1}$ als Hauptelement. Dann hat man, wie sofort ersichtlich, die verlangte Normalordnung. — Ist σ Limeszahl, so stelle für jedes $\nu<\sigma$ $\mathfrak{K}_\nu$ diejenige Normalordnung des Körpers $\mathfrak{K}_0(\mathfrak{J}_\nu)$ dar, für welche F_ν das System der Hauptfunktionen ist, während jedes Element i_μ $(\mu<\nu)$ ausgezeichnete Nullstelle von $f_\mu(x)$ wird. Dann zeigt eine einfache Überlegung, daß jeder Körper der Folge $|\mathfrak{K}_\nu|$ $(0\leqq\nu<\sigma)$ Abschnitt aller späteren ist, und daß die Gesamtheit der in diesen Körpern auftretenden Elemente eine Wohlordnung von $\mathfrak{R}$ liefert, die allen Bedingungen der Aufgabe entspricht.

5. *Sind $\mathfrak{K}_0$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0$ ähnlich-isomorphe Körper, ist $\mathfrak{R}=\mathfrak{K}_\sigma$ eine normale und normal geordnete Erweiterung von $\mathfrak{K}_0$, $\overline{\mathfrak{R}}=\overline{\mathfrak{K}}_\sigma$ eine ebensolche von $\overline{\mathfrak{K}}_0$, sind $F=|f_\nu(x)|$, $\overline{F}=|\overline{f}_\nu(x)|$ $(0\leqq\nu<\sigma)$ die zugehörigen Systeme der Hauptfunktionen und werden durch die zwischen $\mathfrak{K}_0$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0$ bestehende ähnlich-isomorphe Beziehung π_0 die Funktionen $f_\nu(x)$ und $\overline{f}_\nu(x)$ einander zugeordnet, so sind $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ ähnlich-isomorph.*

Beweis durch Induktion: Ist $\sigma=1$, n der Grad von $f_0(x)$ und $\overline{f}_0(x)$ und sind j_0, $\overline{j}_0$ die Hauptelemente, so erhält man alle Elemente von $\mathfrak{R}$ bzw. $\overline{\mathfrak{R}}$, indem man in allen Funktionen $g(x)$, $\overline{g}(x)$ aus $\mathfrak{K}_0$ bzw. $\overline{\mathfrak{K}}_0$, deren Grad kleiner als n ist, x durch j_0 bzw. $\overline{j}_0$ ersetzt. Den Funktionen $g(x)$ kommt in $\mathfrak{K}_0$, den Funktionen $\overline{g}(x)$ in $\overline{\mathfrak{K}}_0$ eine bestimmte Reihenfolge zu, und aus dem Umstande, daß π_0 eine ähnliche Beziehung zwischen $\mathfrak{K}_0$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0$ darstellt, ergibt sich sofort, daß auch die durch π_0 vermittelte Beziehung zwischen den Funktionen aus $\mathfrak{K}_0$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0$ eine ähnliche ist. Weiter folgt aus § 20, Def. 5., daß wir eine ähnliche π_0 umfassende Beziehung π_1 zwischen $\mathfrak{R}=\mathfrak{K}_0(j_0)$ und $\overline{\mathfrak{R}}=\overline{\mathfrak{K}}_0(\overline{j}_0)$ erhalten, wenn wir jedem Element $g(j_0)$ aus $\mathfrak{R}$ das Element $\overline{g}(\overline{j}_0)$ aus $\overline{\mathfrak{R}}$ entsprechen lassen, wobei $\overline{g}(x)$ die der Funktion $g(x)$ aus $\mathfrak{K}_0$ in der Beziehung π_0 entsprechende Funktion aus $\overline{\mathfrak{K}}_0$ bezeichnet. Da ferner π_0 einen Isomorphismus darstellt, so folgt, wie bei § 8, 1., daß auch die Beziehung π_1 zugleich isomorph ist. — Ist $\sigma>1$ und bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_\nu$, $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$ $(\nu<\sigma)$ die Hauptabschnitte von $\mathfrak{R}$ bzw. $\overline{\mathfrak{R}}$, so stellen $\mathfrak{K}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$ normale und normal geordnete

Erweiterungen von $\mathfrak{K}_0$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0$ dar, deren Hauptfunktionen durch π_0 ineinander übergeführt werden, und wir dürfen als erwiesen ansehen, daß $\mathfrak{K}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$ ähnlich-isomorph sind, d. h. daß die einzige zwischen $\mathfrak{K}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$ bestehende ähnliche Beziehung π_ν zugleich isomorph ist. Ist $\mu < \nu < \sigma$, so sind $\mathfrak{K}_\mu$ und $\overline{\mathfrak{K}}_\mu$ ähnliche Abschnitte von $\mathfrak{K}_\nu$ bzw. $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$, werden also durch π_ν ebenso wie durch π_μ ähnlich aufeinander abgebildet. Die Beziehung π_μ bildet also einen Teil von π_ν. Daraus folgt, wenn σ Limeszahl, also jedes Element von $\mathfrak{N}$ bzw. $\overline{\mathfrak{N}}$ in einem Körper $\mathfrak{K}_\nu$ bzw. $\overline{\mathfrak{K}}_\nu$ vorkommt, daß durch die Beziehungen π_ν eine ein-eindeutige Abbildung π_σ von $\mathfrak{N}$ auf $\overline{\mathfrak{N}}$ hergestellt wird. Eine einfache Überlegung zeigt, daß die Abbildung π_σ eine ähnliche ist, weil dies bei den Abbildungen π_ν der Fall ist; ebenso, daß π_σ ein Isomorphismus ist, weil die Beziehungen π_ν Isomorphismen darstellen. — Ist σ keine Limeszahl, so hat man zunächst zwischen $\mathfrak{K}_{\sigma-1}$ und $\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma-1}$ die ähnlich-isomorphe Beziehung $\pi_{\sigma-1}$, welche π_0 umfaßt, also die Hauptfunktionen $f_{\sigma-1}(x)$ und $\overline{f}_{\sigma-1}(x)$ einander zuordnet. Es wird ferner durch $\pi_{\sigma-1}$ der Hauptfaktor $\varphi_{\sigma-1}(x)$ als erster Faktor von $f_{\sigma-1}(x)$ innerhalb $\mathfrak{K}_{\sigma-1}$ in den ersten Faktor von $\overline{f}_{\sigma-1}(x)$ innerhalb $\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma-1}$, d. i. $\overline{\varphi}_{\sigma-1}(x)$ verwandelt. Die Körper $\mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{N}}$ erweisen sich als normale und normal geordnete Erweiterungen von $\mathfrak{K}_{\sigma-1}$ und $\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma-1}$ mit nur je einer Hauptfunktion $\varphi_{\sigma-1}(x)$ bzw. $\overline{\varphi}_{\sigma-1}(x)$. Da $\mathfrak{K}_{\sigma-1}$ und $\overline{\mathfrak{K}}_{\sigma-1}$ durch $\pi_{\sigma-1}$ ähnlich-isomorph aufeinander abgebildet werden und $\pi_{\sigma-1}$ zugleich die Hauptfunktionen ineinander überführt, so folgt das Bestehen der ähnlich-isomorphen Beziehung zwischen $\mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{N}}$ wie im Falle $\sigma = 1$.

Lassen wir in Satz 5. $\mathfrak{K}_0$ und $\overline{\mathfrak{K}}_0$ zu einem und demselben wohlgeordneten Körper zusammenfallen, so ergibt sich:

6. *Sind $\mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{N}}$ normale und normal geordnete Erweiterungen des wohlgeordneten Körpers $\mathfrak{K}_0$ und gehört zu beiden dasselbe System $|f_\nu(x)|$ von Hauptfunktionen, so sind $\mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{N}}$ ähnlich-isomorph.*

7. *Ist $\mathfrak{K}_0$ ein wohlgeordneter Körper, $F = F_\sigma = |f_\nu(x)|$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ ein fortschreitendes System von Normalfunktionen aus $\mathfrak{K}_0$, so gibt es normale und normal geordnete Erweiterungen von $\mathfrak{K}_0$ mit dem Hauptfunktionensystem F.*

Beweis durch Induktion: Im Falle $\sigma = 1$ können wir nach § 8, 1. eine Erweiterung $\mathfrak{N}$ bestimmen, welche zur Zerfällung von $f_0(x)$ gerade

hinreicht. $\mathfrak{R}$ ist normal, und da auch $f_0(x)$ normal ist, so wird $\mathfrak{R}=\mathfrak{k}_0(j_0)$, wenn j_0 irgendeine Nullstelle von $f_0(x)$ in $\mathfrak{R}$ ist. Ordnen wir $\mathfrak{R}$ in bezug auf $\mathfrak{k}_0$ primitiv und so, daß j_0 Hauptelement wird, so ist sofort zu sehen, daß $\mathfrak{R}$ den Bedingungen des Satzes entspricht. — Ist $\sigma>1$ und keine Limeszahl, so bezeichne $\mathfrak{k}_{\sigma-1}$ eine normale und normal geordnete Erweiterung von $\mathfrak{k}_0$ mit dem Hauptfunktionensystem $F_{\sigma-1}=\{f_\nu(x)\}$ $(0\leqq\nu<\sigma-1)$. Von den irreduziblen Faktoren, welche die Normalfunktion $f_{\sigma-1}(x)$ im wohlgeordneten Körper $\mathfrak{k}_{\sigma-1}$ besitzt, sei $\varphi_{\sigma-1}(x)$ die erste. Ihr Grad muß, da $\mathfrak{k}_{\sigma-1}$ zur Zerfällung von $F_{\sigma-1}$ gerade hinreicht (Satz 1.) und das Normalfunktionensystem F fortschreitet, größer als 1 sein. Erweitert man $\mathfrak{k}_{\sigma-1}$ durch Adjunktion einer Nullstelle $j_{\sigma-1}$ von $\varphi_{\sigma-1}(x)$ zu einem Körper $\mathfrak{R}$ und ordnet man diesen primitiv in bezug auf $\mathfrak{k}_{\sigma-1}$ mit $j_{\sigma-1}$ als Hauptelement, so entspricht $\mathfrak{R}$ offenbar den Bedingungen des Satzes 7. — Ist σ Limeszahl, so bezeichne $\mathfrak{k}'_\nu$ $(0<\nu<\sigma)$ eine normale und normal geordnete Erweiterung von $\mathfrak{k}_0$ mit dem Hauptfunktionensystem $F_\nu=\{f_\lambda(x)\}$ $(0\leqq\lambda<\nu)$. Ist $\mu<\nu$, so besitzt $\mathfrak{k}'_\nu$ einen Hauptabschnitt, der in bezug auf $\mathfrak{k}_0$ normal und normal geordnet ist und das Hauptfunktionensystem F_μ hat. Nach 6. muß dieser Abschnitt zu $\mathfrak{k}'_\mu$ ähnlich-isomorph sein. Somit ergibt sich: *Von den Körpern der Folge* $\mathfrak{k}_0$, $\{\mathfrak{k}'_\nu\}$ $(0<\nu<\sigma)$ *ist jeder einem Abschnitt jedes späteren ähnlich-isomorph.* Mithin gibt es (§ 20, 4.) einen wohlgeordneten Körper $\bar{\mathfrak{R}}$ von der Beschaffenheit, daß $\mathfrak{k}_0$ einem Abschnitt $\bar{\mathfrak{k}}_0$ und jeder Körper $\mathfrak{k}'_\nu$ $(0<\nu<\sigma)$ einem Abschnitt $\bar{\mathfrak{k}}_\nu$ von $\bar{\mathfrak{R}}$ ähnlich-isomorph ist, und daß jedes Element aus $\bar{\mathfrak{R}}$ in Abschnitten $\bar{\mathfrak{k}}_\nu$ vorkommt. Aus dem Umstande, daß zwischen $\mathfrak{k}_0$ und $\bar{\mathfrak{k}}_0$ eine ähnlich-isomorphe Beziehung besteht, folgt, daß man einen zu $\bar{\mathfrak{R}}$ ähnlich-isomorphen Körper $\mathfrak{R}$ erhält, der zugleich Erweiterungskörper von $\mathfrak{k}_0$ ist, wenn man den Abschnitt $\bar{\mathfrak{k}}_0$ von $\bar{\mathfrak{R}}$ durch das wohlgeordnete System $\mathfrak{k}_0$ ersetzt und verfügt, daß jede Kompositionsgleichung $(a+b=c,\ a\cdot b=d)$ aus $\bar{\mathfrak{R}}$ zu einer Kompositionsgleichung aus $\mathfrak{R}$ werden soll, falls für die in ihr eventuell auftretenden Elemente von $\bar{\mathfrak{k}}_0$ die entsprechenden von $\mathfrak{k}_0$ substituiert werden. Durch diese Substitution geht jeder Abschnitt $\bar{\mathfrak{k}}_\nu$ von $\bar{\mathfrak{R}}$ in einen zu ihm, also auch zu $\mathfrak{k}'_\nu$ ähnlich-isomorphen Abschnitt $\mathfrak{k}_\nu$ von $\mathfrak{R}$ über, und jedes Element von $\mathfrak{R}$ kommt in solchen Abschnitten $\mathfrak{k}_\nu$ vor. Durch die ähnlich-isomorphe Beziehung π_ν zwischen $\mathfrak{k}'_\nu$ und $\mathfrak{k}_\nu$ werden alle Ordnungsbeziehungen und Gleichungen des einen Körpers in richtige Ordnungsbeziehungen und Gleichungen

des andern übergeführt. Da ferner durch π_ν die Elemente von $\mathfrak{K}_0$, also auch die Funktionen des Systems F nicht alteriert werden, so stellt $\mathfrak{K}_\nu$ wie $\mathfrak{K}'_\nu$ eine normale und normal geordnete Erweiterung von $\mathfrak{K}_0$ mit F_ν als Hauptfunktionensystem dar. Aus dem Umstande, daß der Körper $\mathfrak{R}$ sich aus den Elementen der Körperfolge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ zusammensetzt, und daß jeder Körper dieser Folge Abschnitt aller späteren und Abschnitt von $\mathfrak{R}$ ist, ist aber sofort zu ersehen, daß auch $\mathfrak{R}$ selbst in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ normal geordnet ist, und daß F das zugehörige System von Hauptfunktionen darstellt.

Aus dem bisherigen ergibt sich nun leicht der fundamentale Satz:

8. *Ist $\mathfrak{K}_0$ ein beliebiger Körper, S ein beliebiges System ganzer Funktionen in $\mathfrak{K}_0$, so gibt es eine und im wesentlichen nur eine Erweiterung von $\mathfrak{K}_0$, welche gerade hinreichend groß ist, um alle Funktionen des Systems S in Linearfaktoren zu zerfällen.*

Beweis: Bei der hier behandelten Frage kann das System S durch irgendein äquivalentes System ersetzt werden (§ 18, 3.), und es darf daher angenommen werden, daß S nur Normalfunktionen enthält (§ 18, 6.). Ferner können wir uns das System S wohlgeordnet denken und, falls es nicht fortschreitend ist, durch ein äquivalentes fortschreitendes Teilsystem ersetzen (§ 20, 1.). Demnach dürfen wir von vornherein annehmen, daß ein fortschreitendes System von Normalfunktionen $F=\{f_\nu(x)\}$ vorliegt. Ferner ist es gestattet, den Körper $\mathfrak{K}_0$ wohlgeordnet vorauszusetzen. Dann aber gibt es nach 7. eine normale und normal geordnete Erweiterung $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}_0$ mit F als Hauptfunktionensystem, und diese ist nach 1. zur vollständigen Zerfällung von F gerade hinreichend. — Nehmen wir nun an, daß noch eine zweite Erweiterung $\bar{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{K}_0$ vorliegt, welche zur vollständigen Zerfällung von F gerade hinreicht. Dann haben wir die Äquivalenz der Erweiterungen $\mathfrak{R}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ nachzuweisen. *Zu diesem Zwecke machen wir vom Auswahlprinzip Gebrauch.* Wir denken uns nämlich aus den Nullstellen, welche die Funktionen $f_\nu(x)$ in $\bar{\mathfrak{R}}$ besitzen, je eine herausgegriffen, so daß wir ein System $\bar{\mathfrak{J}}=\{i_\nu\}$ haben, wo i_ν Nullstelle von $f_\nu(x)$ ist. Da es sich um Normalfunktionen handelt, wird $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{K}_0(\bar{\mathfrak{J}})$. Nach 4. kann $\bar{\mathfrak{R}}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ normal so geordnet werden, daß F das System der Hauptfunktionen wird (und daß die Elemente i_ν ausgezeichnete Null-

stellen der Hauptfunktionen werden. Dies letztere ist jetzt von keiner Bedeutung mehr, aber ohne diesen Teil konnte der Satz 4. nicht bewiesen werden). Somit sind $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ normale und normal geordnete Erweiterungen von $\mathfrak{k}_0$ mit demselben System von Hauptfunktionen, und es besteht zwischen ihnen eine ähnlich-isomorphe Beziehung π (Satz 6.). Da durch diese jedes Element des gemeinsamen Abschnitts $\mathfrak{k}_0$ sich selbst zugeordnet wird, so sind die Erweiterungen $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ äquivalent.

Aus 8. folgt weiter durch Spezialisierung:

9. *Jeder Körper läßt sich, und zwar im wesentlichen nur auf eine Art, algebraisch zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper erweitern. — Jedem beliebigen Körpertypus entspricht auf diese Weise ein bestimmter abgeschlossener.*

Verstehen wir nämlich unter S das System *aller* ganzen Funktionen aus $\mathfrak{k}_0$, so ist ein Erweiterungskörper von $\mathfrak{k}_0$ dann und nur dann algebraisch abgeschlossen und in bezug auf $\mathfrak{k}_0$ algebraisch, wenn er zur Zerfällung von S gerade hinreicht. Hieraus folgt nach 8. der erste Teil von 9. — Es sei nun irgendein Körpertypus gegeben, es seien $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}_0'$ zwei Körper dieses Typus und $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ algebraische und algebraisch abgeschlossene Erweiterungen von $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}_0'$. Dann ist zu zeigen, daß $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ von gleichem Typus sind. Zu diesem Zweck führen wir ein System $\mathfrak{S}$ von neuen Elementen ein, die wir den nicht zu $\mathfrak{k}_0'$ gehörigen Elementen von $\mathfrak{L}'$ eindeutig zuordnen. Diese Zuordnung gibt zusammen mit einem Isomorphismus π_0 zwischen $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}_0'$ eine Abbildung π_1 zwischen $\mathfrak{L}'$ und $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{S}$. Verfügen wir, daß durch π_1 jede Kompositionsgleichung $a' + b' = c'$, $a' \cdot b' = d'$ aus $\mathfrak{L}'$, auch wenn die Elemente a', b' nicht beide zu $\mathfrak{k}_0'$ gehören, in eine Kompositionsgleichung aus $\overline{\mathfrak{L}}$ übergehen soll, so wird $\overline{\mathfrak{L}}$ ein zu $\mathfrak{L}'$ isomorpher, mithin algebraisch abgeschlossener Körper und stellt eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{k}_0$ dar. $\mathfrak{L}$ und $\overline{\mathfrak{L}}$ sind daher nach dem ersten bereits bewiesenen Teil von 9. äquivalente Erweiterungen von $\mathfrak{k}_0$, und wir haben eine isomorphe Beziehung $\overline{\pi}_1$ zwischen $\mathfrak{L}$ und $\overline{\mathfrak{L}}$, welche die Elemente von $\mathfrak{k}_0$ ungeändert läßt. Aus $\overline{\pi}_1$ und π_1 resultiert die nachzuweisende isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$. Dieselbe stellt sich als eine Erweiterung des zwischen $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}_0'$ bestehenden Isomorphismus π_0 dar.

§ 22.

Transzendente Erweiterungen. Algebraische Abhängigkeit zwischen Elementen eines Erweiterungskörpers.

Jede nicht algebraische Erweiterung eines Körpers nennen wir transzendent. — Den folgenden Untersuchungen, welche uns zu einer übersichtlichen Einteilung aller Körper führen sollen, legen wir einen Körper $\mathfrak{k}$ zugrunde und beziehen auf diesen Ausdrücke wie „Erweiterungskörper", „transzendent" u. s. f., sofern nichts anderes bemerkt ist. Ist $\mathfrak{S}$ ein System von Elementen eines Erweiterungskörpers $\mathfrak{L}$, a ein Element aus $\mathfrak{L}$, so nennen wir *a algebraisch abhängig von $\mathfrak{S}$ (in bezug auf $\mathfrak{k}$)*, wenn a in bezug auf den Körper $\mathfrak{k}(\mathfrak{S})$ algebraisch ist; ein Elementensystem $\mathfrak{S}'$ nennen wir algebraisch abhängig von $\mathfrak{S}$, wenn jedes Element aus $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ algebraisch abhängt.

1. *Hängt das Element a vom System $\mathfrak{S}$ algebraisch ab, so gibt es ein endliches Teilsystem $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$, von welchem a algebraisch abhängt.*

Denn aus unserer Voraussetzung folgt, daß a Nullstelle einer ganzen Funktion $\varphi(x)$ des Körpers $\mathfrak{k}(\mathfrak{S})$ ist. Da $\varphi(x)$ nur endlich viele Koeffizienten hat, so gibt es ein endliches Teilsystem $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ derart, daß diese Koeffizienten schon in $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}')$ vorkommen. Dann hängt aber a von $\mathfrak{S}'$ algebraisch ab.

2. *Hängt $\mathfrak{S}_3$ von $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2$ von $\mathfrak{S}_1$ algebraisch ab, so ist $\mathfrak{S}_3$ algebraisch abhängig von $\mathfrak{S}_1$.*

Setzen wir nämlich $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{k}_2$, so folgt aus unserer Voraussetzung, daß $\mathfrak{k}_1(\mathfrak{S}_2)$ in bezug auf $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2(\mathfrak{S}_3)$ in bezug auf $\mathfrak{k}_2$ algebraisch ist (§ 7, 7.). Da $\mathfrak{k}_2$ Teilkörper von $\mathfrak{k}_1(\mathfrak{S}_2)$ ist, so sind die Elemente von $\mathfrak{k}_2(\mathfrak{S}_3)$ in bezug auf $\mathfrak{k}_1(\mathfrak{S}_2)$, also auch in bezug auf $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}(\mathfrak{S}_1)$ algebraisch (§ 7, 9.). Mithin sind die Elemente von $\mathfrak{S}_3$ in bezug auf $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}_1)$ algebraisch, w. z. b. w.

Nennen wir daher zwei Systeme $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ *algebraisch äquivalent (in bezug auf $\mathfrak{k}$)* oder kurz *äquivalent*, wenn jedes vom andern algebraisch abhängt, so sind zwei Systeme, die einem dritten äquivalent sind, auch untereinander äquivalent u. s. f.

Wir nennen ein System $\mathfrak{S}$ von Elementen eines Erweiterungskörpers *algebraisch reduzibel (in bezug auf $\mathfrak{k}$)* oder kurz *reduzibel*, wenn es einem echten Teil von sich selbst äquivalent ist oder aus einem einzigen, in

bezug auf $\mathfrak{k}$ algebraischen Element besteht; andernfalls nennen wir $\mathfrak{S}$ (*algebraisch*) *irreduzibel.* Aus dieser Erklärung ist sofort zu sehen, daß in einem reduziblen System, welches mehr als ein Element enthält, wenigstens ein Element vorkommt, das von dem System der übrigen Elemente algebraisch abhängt. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit 1. unmittelbar:

3. *Jedes Teilsystem eines irreduziblen Systems ist irreduzibel.*

4. *Jedes reduzible System enthält ein endliches reduzibles Teilsystem.*

Rein transzendente Erweiterungen. — Eine Erweiterung eines Körpers nennen wir *rein transzendent,* wenn sie durch Adjunktion eines irreduziblen Systems $\mathfrak{S}$ erhalten werden kann. Besteht $\mathfrak{S}$ nur aus endlich vielen Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so haben wir es mit einer solchen Erweiterung zu tun, wie wir sie am Schluß von § 5 betrachtet haben: Der Körper $\mathfrak{k}(\mathfrak{S})$ besteht aus den rationalen Funktionen der Transzendenten oder Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{k}$. Ist das System $\mathfrak{S}$ unendlich, so besteht $\mathfrak{k}(\mathfrak{S})$ aus den Elementen aller Körper $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}')$, worin $\mathfrak{S}'$ jedes endliche Teilsystem von $\mathfrak{S}$ bezeichnet. Die allgemeinste rein transzendente Erweiterung wird daher erhalten, indem man ein beliebiges System $\mathfrak{S}$ von unendlich vielen „Unbestimmten" einführt. Jedes endliche Teilsystem $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ liefert dann eine Erweiterung $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}')$ der früher betrachteten Art, und die Gesamtheit aller Körper $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}')$ konstituiert einen Körper (§ 2, 2.), der aus $\mathfrak{k}$ durch Adjunktion des irreduziblen Systems $\mathfrak{S}$ hervorgeht. — Hat man zwei Erweiterungen $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}_1)$, $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}_2)$, sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ irreduzible Systeme, und ist die endliche oder unendlich große Anzahl ihrer Elemente (Kardinalzahl, Mächtigkeit) gleich, d. h. kann man zwischen ihren Elementen eine ein-eindeutige Beziehung φ herstellen, so gibt es einen bestimmten Isomorphismus π zwischen $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}_1)$ und $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}_2)$, durch welchen jedes Element von $\mathfrak{k}$ sich selbst zugeordnet wird und die Elemente von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ aufeinander in derselben Weise wie durch φ bezogen werden. Dies wurde für den Fall endlicher Systeme in § 5 gezeigt, folgt aber daraus auf Grund einer einfachen Überlegung sofort für unendliche Systeme. Also:

5. *Zwei rein transzendente Erweiterungen* $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}_1)$, $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}_2)$ *eines Körpers* $\mathfrak{k}$, *bei denen die irreduziblen Systeme* $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ *gleich viele Elemente enthalten, sind äquivalent.*

6. *Wird ein irreduzibles System* $\mathfrak{S}$ *durch Hinzufügung eines Elementes* a *reduzibel, so ist* a *von* $\mathfrak{S}$ *algebraisch abhängig.*

Das reduzible System $\mathfrak{S}+a$ enthält nämlich ein endliches reduzibles System $\mathfrak{T}$. a muß in $\mathfrak{T}$ vorkommen, weil sonst $\mathfrak{T}$ Teil von $\mathfrak{S}$, also irreduzibel wäre. Es sei $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}'+a$, und es bestehe $\mathfrak{T}'$ aus den Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Da $\mathfrak{T}'$ irreduzibel ist, so ist jeder Körper der Folge

$$\mathfrak{K},\ \mathfrak{K}_1=\mathfrak{K}(x_1),\ \mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}_1(x_2),\ \ldots\ \mathfrak{K}_n=\mathfrak{K}_{n-1}(x_n)=\mathfrak{K}(\mathfrak{T}')$$

in bezug auf den vorangehenden transzendent. Wäre auch $\mathfrak{K}_n(a)$ in bezug auf $\mathfrak{K}_n$ transzendent, so wäre (§ 5, 9.) jedes Element aus $\mathfrak{T}$ von dem System der übrigen Elemente algebraisch unabhängig, $\mathfrak{T}$ wäre irreduzibel. Da dies nicht der Fall ist, so ist a in bezug auf $\mathfrak{K}_n=\mathfrak{K}(\mathfrak{T}')$ algebraisch, also von $\mathfrak{T}'$ und somit auch von $\mathfrak{S}$ algebraisch abhängig.

7. *Ist $\mathfrak{S}$ ein (in bezug auf $\mathfrak{K}$) irreduzibles System, das Element a in bezug auf $\mathfrak{K}$ transzendent, aber von $\mathfrak{S}$ algebraisch abhängig, so enthält $\mathfrak{S}$ ein bestimmtes endliches Teilsystem $\mathfrak{T}$ von folgender Beschaffenheit: a ist von $\mathfrak{T}$ algebraisch abhängig; jedes Teilsystem von $\mathfrak{S}$, von welchem a algebraisch abhängt, enthält das System $\mathfrak{T}$; wird irgendein Element aus $\mathfrak{T}$ durch a ersetzt, so geht $\mathfrak{S}$ in ein äquivalentes irreduzibles System über; keinem der übrigen Elemente von $\mathfrak{S}$ kommt diese Eigenschaft zu.*

Beweis: Es bezeichne $\mathfrak{S}'$ irgendein Teilsystem von $\mathfrak{S}$, von welchem a algebraisch abhängt (das System $\mathfrak{S}$ selbst nicht ausgeschlossen). Dann besitzt $\mathfrak{S}'$ endliche Teilsysteme, von denen a algebraisch abhängt. Es sei $\mathfrak{T}$ ein solches mit möglichst wenig Elementen. Die Elemente von $\mathfrak{T}$ seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, und es werde mit $\mathfrak{T}_i (i=1, \ldots m)$ das System bezeichnet, welches nach Fortlassung von α_i aus $\mathfrak{T}$ zurückbleibt (im Falle $m=1$ das leere System). Da a vom System $\mathfrak{T}$ algebraisch abhängig, von jedem der Systeme $\mathfrak{T}_i$ algebraisch unabhängig ist, so ist das System $\mathfrak{T}+a$ reduzibel, während die Systeme $\mathfrak{T}_i+a$ irreduzibel sind (Satz 6.). Dies gilt auch im Falle $m=1$, weil a in bezug auf $\mathfrak{K}$ transzendent ist. Da das irreduzible System $\mathfrak{T}_i+a$ durch Hinzufügung von α_i in das reduzible $\mathfrak{T}+a$ übergeht, so hängt α_i von $\mathfrak{T}_i+a$ algebraisch ab, und die Systeme $\mathfrak{T}_i+a$ und $\mathfrak{T}+a$ sind äquivalent. Ebenso sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}+a$ äquivalent. Somit sehen wir: *Die $m+1$ Systeme $\mathfrak{T}_i+a$, $\mathfrak{T}$ sind $\mathfrak{T}+a$, also auch einander äquivalent.*

Wir wollen nun zeigen, daß jedes Teilsystem $\mathfrak{S}''$ von $\mathfrak{S}$, von dem a algebraisch abhängt, das System $\mathfrak{T}$ enthalten muß. Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}$ ein endliches aus möglichst wenig Elementen bestehendes

Teilsystem von $\mathfrak{S}''$, von welchem a algebraisch abhängt, und weisen die Identität von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{T}$ nach. Es bestehe $\mathfrak{U}$ aus den Elementen $\beta_1, \ldots \beta_n$, und es bezeichne $\mathfrak{U}_i$ $(i=1, \ldots n)$ das nach Fortlassung von β_i aus $\mathfrak{U}$ zurückbleibende System. Dann sind die Systeme $\mathfrak{U}_i + a$ und $\mathfrak{U}$ irreduzibel und einander sowie dem reduziblen System $\mathfrak{U} + a$ äquivalent. — Wegen ihrer Eigenschaft als kleinste Systeme, von denen a algebraisch abhängt, kann keins der Systeme $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$ ein echter Teil des andern sein. Wären sie also verschieden, so dürften wir annehmen, daß α_1 nicht in $\mathfrak{U}$, β_1 nicht in $\mathfrak{T}$ vorkommt. Es sei nun $\mathfrak{V}$ dasjenige Teilsystem von $\mathfrak{S}$, welches alle Elemente von $\mathfrak{T}$ und alle von $\mathfrak{U}$, aber sonst kein Element enthält. Da $\mathfrak{T}_1 + a$ mit dem in $\mathfrak{V}$ enthaltenen System $\mathfrak{T}$ äquivalent ist, so erhält man aus $\mathfrak{V}$ ein zu $\mathfrak{V}$ äquivalentes System $\mathfrak{V}'$, wenn man α_1 durch a ersetzt. $\mathfrak{V}'$ enthält das System $\mathfrak{U} + a$, und da dieses $\mathfrak{U}$ äquivalent ist, so erhält man ein $\mathfrak{V}'$ äquivalentes System $\mathfrak{V}''$, wenn man aus $\mathfrak{V}'$ das Element a fortläßt. Hiernach würde $\mathfrak{V}$ einem echten Teil $\mathfrak{V}''$ von sich äquivalent, also reduzibel sein. Das ist aber nicht möglich, weil $\mathfrak{V}$ Teil des irreduziblen Systems $\mathfrak{S}$ ist.

Es muß also in der Tat $\mathfrak{T}$ in jedem Teilsystem von $\mathfrak{S}$ enthalten sein, von welchem a algebraisch abhängt. Bezeichnet daher $\mathfrak{S}_i$ $(i=1, \ldots m)$ das System, welches nach Fortlassung von α_i aus $\mathfrak{S}$ zurückbleibt, so ist a von dem irreduziblen System $\mathfrak{S}_i$ algebraisch unabhängig, das System $\mathfrak{S}_i + a$ also ebenfalls irreduzibel. $\mathfrak{S}_i + a$ geht aber aus $\mathfrak{S}$ hervor, indem man α_i durch a oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_i + \alpha_i$ durch das äquivalente System $\mathfrak{T}_i + a$ ersetzt. Es sind daher $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_i + a$ äquivalente Systeme. Also: *Man erhält ein irreduzibles und $\mathfrak{S}$ äquivalentes System, wenn man eins der Elemente von $\mathfrak{T}$ durch a ersetzt.* — Ist hingegen γ ein nicht in $\mathfrak{T}$ vorkommendes Element von $\mathfrak{S}$, nach dessen Fortlassung $\mathfrak{S}'$ zurückbleibt, so enthält $\mathfrak{S}'$ das System $\mathfrak{T}$, a hängt also von $\mathfrak{S}'$ algebraisch ab, und das System $\mathfrak{S}' + a$, welches aus $\mathfrak{S}$ hervorgeht, wenn γ durch a ersetzt wird, ist also reduzibel. Es ist dem System $\mathfrak{S}'$ äquivalent, und da dieses als echter Teil des irreduziblen Systems $\mathfrak{S}$ nicht $\mathfrak{S}$ äquivalent sein kann, so ist auch $\mathfrak{S}' + a$ nicht $\mathfrak{S}$ äquivalent. Damit ist der Beweis von 7. in allen Teilen erbracht.

8. *Es seien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ endliche irreduzible Systeme von m bzw. n Elementen; es sei $n \leqq m$ und $\mathfrak{V}$ algebraisch abhängig von $\mathfrak{U}$. Dann sind im*

Falle $m=n$ die Systeme $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ äquivalent, im Falle $n<m$ aber ist $\mathfrak{U}$ einem irreduziblen System äquivalent, welches aus $\mathfrak{V}$ und $m-n$ Elementen aus $\mathfrak{U}$ besteht.

Es seien nämlich $u_1, \ldots u_m$ die Elemente von $\mathfrak{U}$, $v_1, \ldots v_n$ die von $\mathfrak{V}$. Da v_1 in bezug auf $\mathfrak{K}$ transzendent ist und von $\mathfrak{U}$ algebraisch abhängt, so gibt es nach 7. in $\mathfrak{U}$ wenigstens ein Element, nach dessen Ersatz durch v_1 aus $\mathfrak{U}$ ein zu $\mathfrak{U}$ äquivalentes, irreduzibles System hervorgeht. Damit ist die Behauptung für den Fall $n=1$ erwiesen. Für $n>1$ ist der Beweis durch die vollständige Induktion zu führen. Da das System $\mathfrak{V}'$, welches aus den Elementen $v_1, \ldots v_{n-1}$ besteht, irreduzibel ist und von $\mathfrak{U}$ algebraisch abhängt, so ist als bewiesen zu erachten, daß $\mathfrak{U}$ einem irreduziblen System $\mathfrak{U}'$ äquivalent ist, welches aus $\mathfrak{V}'$ und $m-n+1$ Elementen aus $\mathfrak{U}$ besteht. v_n hängt von $\mathfrak{U}'$, nicht aber von $\mathfrak{V}'$ algebraisch ab. Ist daher $\mathfrak{T}$ das kleinste Teilsystem von $\mathfrak{U}'$, von welchem v_n algebraisch abhängt, so enthält $\mathfrak{T}$ wenigstens eines der $m-n+1$ Elemente aus $\mathfrak{U}$. Ersetzen wir ein solches durch v_n, so wird aus $\mathfrak{U}'$ ein irreduzibles, $\mathfrak{U}$ äquivalentes System, welches aus $\mathfrak{V}$ und $m-n$ Elementen von $\mathfrak{U}$ besteht. Im Falle $m=n$ sind also $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ äquivalent.

Wir ersehen daraus auch, daß ein irreduzibles, von $\mathfrak{U}$ algebraisch abhängiges System $\mathfrak{V}$ nicht mehr als m Elemente enthalten kann. Andernfalls würde ein echter aus m Elementen bestehender Teil $\mathfrak{V}'$ von $\mathfrak{V}$ nach dem eben Bewiesenen mit $\mathfrak{U}$ äquivalent sein. Es wäre $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{V}'$ algebraisch abhängig, also reduzibel. Also:

9. *Ein irreduzibles System $\mathfrak{V}$, welches von einem endlichen System $\mathfrak{U}$ algebraisch abhängt, kann nicht mehr Elemente enthalten als dieses; im Falle gleicher Elementenzahl sind beide Systeme äquivalent.*

§ 23.

Der Transzendenzgrad und die Einteilung der Körper in Klassen.

In den folgenden Betrachtungen, in denen wir uns wie bisher auf einen Grundkörper $\mathfrak{K}$ beziehen, kommt wieder der Wohlordnungssatz zur Anwendung.

1. *Jedes System $\mathfrak{S}$, dessen Elemente nicht sämtlich in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch sind, ist einem irreduziblen Teilsystem äquivalent.*

Beweis: Enthält $\mathfrak{S}$ algebraische Elemente, so bleibt nach Fortlassung derselben ein $\mathfrak{S}$ äquivalentes System zurück, mit welchem wir weiter operieren können. Wir dürfen daher von vornherein annehmen, daß jedes Element von $\mathfrak{S}$ in bezug auf $\mathfrak{k}$ transzendent ist. Ist nun zunächst $\mathfrak{S}$ endlich, $\mathfrak{T}$ ein $\mathfrak{S}$ äquivalentes Teilsystem von möglichst wenig Elementen, so ist $\mathfrak{T}$ offenbar auch irreduzibel. — Ist das System $\mathfrak{S}$ unendlich, so denken wir es uns wohlgeordnet — $\mathfrak{S}=\{a_\nu\}$ — und bezeichnen mit $\mathfrak{S}_\nu$ den durch a_ν bestimmten Abschnitt. Lassen wir aus $\mathfrak{S}$ jedes Element a_ν $(\nu>0)$ fort, welches von dem zugehörigen Abschnitt $\mathfrak{S}_\nu$ algebraisch abhängt, so bleibt ein System $\mathfrak{S}'$ zurück, welches irreduzibel und mit $\mathfrak{S}$ äquivalent ist. Zunächst nämlich ist a_0, weil zu $\mathfrak{S}'$ gehörig, von $\mathfrak{S}'$ algebraisch abhängig. Wird ferner als schon bewiesen angenommen, daß die Elemente des Abschnitts $\mathfrak{S}_\nu$ von $\mathfrak{S}'$ algebraisch abhängen, so gilt dasselbe für a_ν, weil a_ν entweder von $\mathfrak{S}_\nu$ algebraisch abhängt oder zu $\mathfrak{S}'$ gehört. Daraus ergibt sich die Äquivalenz von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$. Wäre $\mathfrak{S}'$ reduzibel und $\mathfrak{T}$ ein endliches reduzibles Teilsystem von $\mathfrak{S}'$ mit möglichst wenig Elementen, a_ν das letzte Element von $\mathfrak{T}$, so wäre a_ν, weil in bezug auf $\mathfrak{k}$ transzendent, nicht einziges Element von $\mathfrak{T}$, und das System $\mathfrak{T}'$, welches nach Fortlassung von a_ν aus $\mathfrak{T}$ zurückbleibt und Teil von $\mathfrak{S}_\nu$ ist, wäre irreduzibel. Mithin wäre (§ 22, 6.) a_ν von $\mathfrak{T}'$, also auch von $\mathfrak{S}_\nu$ algebraisch abhängig. Dann aber gehörte a_ν nicht zu $\mathfrak{S}'$, und wir erhielten einen Widerspruch. Es ist also $\mathfrak{S}'$ irreduzibel und damit Satz 1. bewiesen.

Es bezeichne nun $\mathfrak{L}=\mathfrak{k}(\mathfrak{S})$ eine beliebige transzendente Erweiterung von $\mathfrak{k}$. Dann ist $\mathfrak{S}$ einem irreduziblen System $\mathfrak{S}'$ äquivalent, und es sind also die Elemente von $\mathfrak{S}$ in bezug auf $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}')$ algebraisch. Daher stellt $\mathfrak{k}(\mathfrak{S})$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}')$, $\mathfrak{k}(\mathfrak{S}')$ eine rein transzendente von $\mathfrak{k}$ dar, und wir erhalten den Satz:

2. *Jede transzendente Erweiterung eines Körpers kann in eine rein transzendente und eine darauffolgende algebraische zerlegt werden.*

Natürlich kann eine solche Zerlegung auf unendlich viele Weisen geschehen. Nehmen wir an, es seien $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zwei irreduzible Systeme aus $\mathfrak{L}$, von denen alle Elemente aus $\mathfrak{L}$ algebraisch abhängen; dann sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ äquivalent. Für den Fall, daß eins dieser Systeme endlich ist, wurde oben gezeigt, daß auch das andere endlich ist und ebensoviele Elemente enthält (§ 22, 9.). Wir werden zeigen, daß auch im Falle un-

endlicher Systeme die Kardinalzahlen übereinstimmen, also (§ 22, 5.) $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}_1)$ und $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}_2)$ äquivalente Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ sind. Zu diesem Zweck führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein.

Ist $\{c_\mu\}$ $(0 \leqq \mu < \tau)$ eine wohlgeordnete Folge von Elementen eines Erweiterungskörpers, τ Limeszahl und sind von einem bestimmten μ an alle Elemente c_μ einander gleich, etwa gleich a, so sagen wir: *die Folge hat einen Grenzwert, dieser ist gleich a;* in Zeichen

$$\lim_{\mu=\tau} c_\mu = a.$$

— Es liege eine wohlgeordnete Doppelfolge vor: $\{c_{\mu\nu}\}$ $(0 \leqq \mu < \tau,\ 0 \leqq \nu < \sigma)$, die wir uns nach Zeilen und Kolonnen geordnet denken, und es seien die Zeilen mit $\mathfrak{W}_\mu$ bezeichnet, so daß $\mathfrak{W}_\mu = \{c_{\mu\nu}\}$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ ist. Ist τ Limeszahl und hat jede Kolonne einen Grenzwert

$$\lim_{\mu=\tau} c_{\mu\nu} = c'_\nu \quad (0 \leqq \nu < \sigma),$$

so sagen wir: *die Folge $\{\mathfrak{W}_\mu\}$ hat den Grenzwert $\mathfrak{W}' = \{c'_\nu\}$.*

Es seien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V} = \{v_\mu\}$ $(0 \leqq \mu < \tau)$ zwei irreduzible in beliebiger Weise wohlgeordnete Systeme, es hänge $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$ algebraisch ab, und es bezeichne v_μ ein beliebiges Element von $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_\mu$ den durch v_μ bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{V}$. $\mathfrak{U}$ enthält (§ 22, 7.) ein bestimmtes kleinstes Teilsystem $\mathfrak{T}$, von dem v_μ algebraisch abhängt. $\mathfrak{T}$ kann wohl Elemente enthalten, die in $\mathfrak{V}_\mu$ vorkommen, enthält aber sicher auch Elemente, die in $\mathfrak{V}_\mu$ nicht vorkommen. Ersetzen wir das letzte von diesen durch v_μ, so geht $\mathfrak{U}$ in ein irreduzibles mit $\mathfrak{U}$ äquivalentes System von derselben Ordnungszahl über. *Für dieses durch $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ und μ vollkommen bestimmte System führen wir das Zeichen $\vartheta_\mu(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ ein.*

Es seien nun $\mathfrak{U} = \{u_\nu\}$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ und $\mathfrak{V} = \{v_\mu\}$ $(0 \leqq \mu < \tau)$ irreduzible wohlgeordnete Systeme, es hänge $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$ algebraisch ab, und es liege eine Doppelfolge $\{c_{\mu\nu}\}$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau,\ 0 \leqq \nu < \sigma)$*) vor, deren Zeilen wir mit $\mathfrak{W}_\mu$ bezeichnen. Wir wollen annehmen, daß folgende Beziehungen bestehen:

---

*) Man beachte an dieser Stelle das Gleichheitszeichen vor τ.

1) Jede Zeile $\mathfrak{W}_\mu = |c_{\mu\nu}|$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ stelle ein irreduzibles System dar und sei $\mathfrak{U}$ äquivalent, so daß $\mathfrak{V}$ von jedem System $\mathfrak{W}_\mu$ algebraisch abhängt.

2) Es sei $\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{U}$, also $c_{0\nu} = u_\nu$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$.

3) Ist $0 < \mu \leqq \tau$, μ keine Limeszahl, so sei $\mathfrak{W}_\mu = \vartheta_{\mu-1}(\mathfrak{W}_{\mu-1}, \mathfrak{V})$.

4) Ist $0 < \mu \leqq \tau$, μ Limeszahl, so habe die Folge $|\mathfrak{W}_\lambda|$ $(0 \leqq \lambda < \mu)$ einen Limes, und dieser sei gleich $\mathfrak{W}_\mu$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so sagen wir: *die Systemfolge* $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau)$ — oder auch: *die Doppelfolge* $|c_{\mu\nu}|$ — *gehört zu dem Systempaar* $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$. Voraussetzung für diese Ausdrucksweise ist also stets, daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ wohlgeordnete irreduzible Systeme sind und daß $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$ algebraisch abhängt.

Durch die Bedingungen 1) bis 4) erscheint jede Zeile durch die vorangehenden bestimmt, und da $\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{U}$ sein soll, ergibt sich zunächst:

a) *Zu einem Systempaar* $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ *kann nicht mehr als eine Systemfolge gehören.* Ferner ergibt sich aus unseren Bedingungen unmittelbar:

b) Gehört zu dem Systempaar $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ die Systemfolge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau)$ und ist $0 < \varrho < \tau$, $\mathfrak{V}_\varrho$ der durch v_ϱ bestimmte Abschnitt von $\mathfrak{V}$, so gehört zu dem Systempaar $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}_\varrho$ die Systemfolge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \varrho)$.

Wir greifen nun, unter der Voraussetzung, daß zu $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ die Systemfolge $|\mathfrak{W}_\mu|$ gehört, aus der Doppelfolge $|c_{\mu\nu}|$ eine Kolonne $|c_{\mu\nu}|$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau)$ heraus. Wenn nicht alle Elemente der Kolonne gleich dem Anfangselement $c_{0\nu} = u_\nu$ sind, so sei $c_{\varrho\nu}$ das erste von u_ν verschiedene. Dann kann ϱ keine Limeszahl sein, weil andernfalls nach 4) $c_{\varrho\nu}$ den Limes von $|c_{\mu\nu}|$ $(0 \leqq \mu < \varrho)$ darstellt, also vorangehenden Elementen der Kolonne gleich ist. Da ϱ nicht Limeszahl ist, so ist nach 3) $\mathfrak{W}_\varrho = \vartheta_{\varrho-1}(\mathfrak{W}_{\varrho-1}, \mathfrak{V})$, und es geht $\mathfrak{W}$ aus $\mathfrak{W}_{\varrho-1}$ hervor, indem ein gewisses Element von $\mathfrak{W}_{\varrho-1}$ durch $v_{\varrho-1}$ ersetzt wird. Da nun $c_{\varrho\nu}$ von $c_{\varrho-1,\nu}$ verschieden ist, so muß $c_{\varrho\nu} = v_{\varrho-1}$ sein. Dann ist aber für jedes $\mu > \varrho$ $c_{\mu\nu} = v_{\varrho-1}$. Denn verstehen wir andernfalls unter μ die kleinste Ordnungszahl $> \varrho$, für welche $c_{\mu\nu} \neq v_{\varrho-1}$ ist, so folgt wie vorher, daß μ keine Limeszahl ist und $\mathfrak{W}_\mu$ aus $\mathfrak{W}_{\mu-1}$ hervorgeht, indem $c_{\mu-1,\nu} = v_{\varrho-1}$ durch $c_{\mu\nu} = v_{\mu-1}$ ersetzt wird. Nach der Erklärung des Zeichens ϑ geht aber $\vartheta_{\mu-1}(\mathfrak{W}_{\mu-1}, \mathfrak{V})$ aus $\mathfrak{W}_{\mu-1}$ hervor, indem ein gewisses Element von $\mathfrak{W}_{\mu-1}$, welches *nicht* dem durch $v_{\mu-1}$ bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{V}$ angehört, durch $v_{\mu-1}$ ersetzt wird. Das Element $v_{\varrho-1}$ gehört aber diesem Abschnitt an. Daraus folgt

c) Gehört zu dem Systempaar $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ die Systemfolge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau)$, wo $\mathfrak{W}_\mu = |c_{\mu\nu}|$ ist, so sind in einer Kolonne $|c_{\mu\nu}|$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau)$ entweder alle Elemente gleich u_ν, oder es existiert eine Ordnungszahl ϱ, $0 < \varrho \leqq \tau$, die nicht Limeszahl ist, derart daß $c_{\mu\nu} = u_\nu$ für $\mu < \varrho$, $c_{\mu\nu} = v_{\varrho-1}$ für $\mu \geqq \varrho$ ist.

Greifen wir unter denselben Voraussetzungen aus $\mathfrak{V}$ ein beliebiges Element $v_{\varrho-1}$ heraus, so kommt dieses nach 3) in $\mathfrak{W}_\varrho$ vor, ist etwa gleich $c_{\varrho\nu}$, und da es, wenn μ die Ordnungszahlen $> \varrho$ durchläuft, wie wir sahen, durch kein $v_{\mu-1}$ ersetzt werden kann, so kommt $v_{\varrho-1}$ in jedem System $\mathfrak{W}_\mu$ vor, dessen Index $\mu \geqq \varrho$ ist. Also:

d) Gehört zu dem Systempaar $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} = |v_\mu|$ $(0 \leqq \mu < \tau)$ die Systemfolge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau)$ und bezeichnet $\mathfrak{V}_\mu$ $(0 < \mu < \tau)$ den durch v_μ bestimmten Abschnitt, während $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_\tau$ gesetzt wird, so enthält $\mathfrak{W}_\mu$ $(0 < \mu \leqq \tau)$ alle Elemente von $\mathfrak{V}_\mu$ (natürlich nicht notwendig in derselben Reihenfolge wie $\mathfrak{V}_\mu$).

Wir behaupten nun:

e) *Zu jedem Paar $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ irreduzibler wohlgeordneter Systeme, deren zweites vom ersten algebraisch abhängt, gehört eine Systemfolge.*

Wir setzen wie vorher $\mathfrak{U} = |u_\nu|$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_\tau = |v_\mu|$ $(0 \leqq \mu < \tau)$ und bezeichnen mit $\mathfrak{V}_\mu$ den durch v_μ bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{V}$. Im Falle $\tau = 1$ erhalten wir die verlangte Systemfolge offenbar, indem wir $\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}_1 = \vartheta_0(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ setzen. Für $\tau > 1$ ist e) durch Induktion zu beweisen. — Ist τ keine Limeszahl, so gehört zunächst zu dem Systempaar $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}_{\tau-1}$ eine Systemfolge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau-1)$, und wenn wir $\vartheta_{\tau-1}(\mathfrak{W}_{\tau-1}, \mathfrak{V}) = \mathfrak{W}_\tau$ setzen, so ergibt sich sofort, daß die Systemfolge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau)$ allen Bedingungen 1) bis 4) entspricht, also zu $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ gehört. — Es sei τ Limeszahl. Ist dann $0 < \lambda \leqq \varrho < \tau$, so gehört zu dem Paar $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}_\varrho$ eine, und nach a) nur eine Systemfolge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \varrho)$, und aus b) folgt, daß die Teilfolge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \lambda)$ zu $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}_\lambda$ gehört. Mithin existiert für jedes $\mu < \tau$ ein eindeutig bestimmtes System $\mathfrak{W}_\mu$ derart, daß der bis zu einem $\mathfrak{W}_\varrho$ (einschließlich) reichende Abschnitt der Folge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu < \tau)$ die zu $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}_\varrho$ gehörige Systemfolge darstellt. Wir setzen $\mathfrak{W}_\mu = |c_{\mu\nu}|$ $(0 \leqq \nu < \sigma)$ und betrachten eine Kolonne $|c_{\mu\nu}|$ $(0 \leqq \mu < \tau)$. Sind nicht alle Elemente gleich u_ν und ist $c_{\varrho\nu}$ das erste von u_ν verschiedene, so sind alle auf $c_{\varrho\nu}$ folgenden Elemente der Kolonne gleich $c_{\varrho\nu}$, weil die Annahme $c_{0\nu} \neq c_{\varrho\nu}$, $c_{\varrho\nu} \neq c_{\varkappa\nu}$, $\varrho < \varkappa$ nach c) mit der Tatsache, daß die Folge $|\mathfrak{W}_\mu|$ $(0 \leqq \mu \leqq \varkappa)$ zu

$\mathfrak{U}, \mathfrak{B}_\varkappa$ gehört, unvereinbar ist. Daher besitzt jede Kolonne, und mithin auch die Folge $\{\mathfrak{W}_\mu\}$ $(0 \leqq \mu < \tau)$ einen Limes. Wir setzen

$$\lim_{\mu=\tau} \mathfrak{W}_\mu = \mathfrak{W}_\tau, \quad \mathfrak{W}_\tau = \{c_{\tau\nu}\} \quad (0 \leqq \nu < \sigma)$$

und behaupten, daß die Systemfolge $\{\mathfrak{W}_\mu\}$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau)$ zu $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ gehört. — Um dies zu beweisen, haben wir zweierlei zu zeigen, nämlich:

f) $\mathfrak{W}_\tau$ ist irreduzibel,

g) $\mathfrak{W}_\tau$ ist mit $\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{U}$ äquivalent.

Wäre das System $\mathfrak{W}_\tau$ reduzibel, so enthielte es ein endliches reduzibles Teilsystem $\mathfrak{T}$. Jedes Element von $\mathfrak{T}$ ist als Grenzwert seiner Kolonne vorangehenden Elementen dieser Kolonne gleich, und da $\mathfrak{T}$ nur endlich viele Elemente enthält, kann man $\varrho < \tau$ so bestimmen, daß alle Elemente von $\mathfrak{T}$ schon in $\mathfrak{W}_\varrho$ vorkommen. Hiernach wäre $\mathfrak{W}_\varrho$ reduzibel, was dem Umstand, daß die Systemfolge $\{\mathfrak{W}_\mu\}$ $(0 \leqq \mu \leqq \varrho)$ zu $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}_\varrho$ gehört, widerspricht. Damit ist f) bewiesen. — Ein beliebiges Element aus $\mathfrak{B}$ kann durch $v_{\varrho-1}$ bezeichnet werden, wo $\varrho < \tau$ ist. $v_{\varrho-1}$ kommt in $\mathfrak{W}_\varrho$ vor, ist etwa gleich $c_{\varrho\nu}$, und es ist alsdann in $\{c_{\mu\nu}\}$ $(0 \leqq \mu < \tau)$ für jedes $\mu \geqq \varrho$ $c_{\mu\nu} = v_{\varrho-1}$, daher auch $c_{\tau\nu} = \lim_{\mu=\tau} c_{\mu\nu} = v_{\varrho-1}$. $\mathfrak{W}_\tau$ enthält also alle Elemente aus $\mathfrak{B}$. Da ferner jedes Element aus $\mathfrak{W}_\tau$ schon in einem System $\mathfrak{W}_\varrho$ $(\varrho < \tau)$ vorkommt und $\mathfrak{W}_\varrho$ mit $\mathfrak{W}_0$ äquivalent ist, so hängt $\mathfrak{W}_\tau$ von $\mathfrak{W}_0$ algebraisch ab, und wir haben, um g) zu beweisen, noch zu zeigen, daß auch $\mathfrak{W}_0$ von $\mathfrak{W}_\tau$ algebraisch abhängt. Zu diesem Zweck führen wir einen allgemeineren Nachweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau,\ 0 < \nu < \sigma)$ den durch $c_{\mu\nu}$ bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{W}_\mu$ und setzen $\mathfrak{W}_\mu = \mathfrak{W}_{\mu\sigma}$. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{W}'_{\mu\nu}$ $(0 < \mu \leqq \tau,\ 0 < \nu \leqq \sigma)$ dasjenige Teilsystem von $\mathfrak{W}_\mu$, welches alle Elemente von $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$, alle Elemente von $\mathfrak{B}_\mu$, sonst aber kein Element enthält, und setzen $\mathfrak{W}'_{0\nu} = \mathfrak{W}_{0\nu}$ $(0 < \nu \leqq \sigma)$. Nunmehr behaupten wir:

h) Jedes System $\mathfrak{W}'_{\mu\nu}$ $(0 \leqq \mu \leqq \tau,\ 0 < \nu \leqq \sigma)$ ist von jedem System $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$ $(\mu \leqq \varrho \leqq \tau)$ algebraisch abhängig.

In dieser Behauptung ist, nämlich wenn wir $\mu = 0$, $\nu = \sigma$, $\varrho = \tau$ wählen, auch die Behauptung enthalten, daß $\mathfrak{W}_0$ von $\mathfrak{W}_\tau$ algebraisch abhängt. Mit h) ist also g) und somit e) bewiesen. Sollte nun die Behauptung h) nicht für jedes System $\mathfrak{W}'_{\mu\nu}$ zutreffen, so wählen wir aus

den Systemen, für welche sie nicht zutrifft, ein solches aus, dessen zweiter Index ν möglichst klein ist. Wir suchen sodann zu diesem $\mathfrak{W}'_{\mu\nu}$ dasjenige $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$ mit kleinstem Index $\varrho > \mu$, von welchem $\mathfrak{W}'_{\mu\nu}$ nicht algebraisch abhängt. Es sei nun a ein Element aus $\mathfrak{W}'_{\mu\nu}$, welches von $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$ nicht algebraisch abhängt. Dann gehört a nicht zu $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$, also auch nicht zu $\mathfrak{V}_\varrho$, also auch nicht zu $\mathfrak{V}_\mu$, mithin zu $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$. Es muß ferner a letztes Element von $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$ sein. Sonst gehörte a einem Abschnitt $\mathfrak{W}_{\mu\lambda}$ von $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$, also auch dem System $\mathfrak{W}'_{\mu\lambda}$ an; da dieses wegen der Minimumseigenschaft von ν von $\mathfrak{W}'_{\varrho\lambda}$ algebraisch abhängt und $\mathfrak{W}'_{\varrho\lambda}$ Teil von $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$ ist, so hinge a von $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$ algebraisch ab. Mithin ist a letztes Element von $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$, also ν keine Limeszahl, und es wird

$$a = c_{\mu,\nu-1}, \quad \mathfrak{W}_{\mu\nu} = \mathfrak{W}_{\mu,\nu-1} + c_{\mu,\nu-1},$$

und da a nicht zu $\mathfrak{V}_\mu$ gehört,

$$\mathfrak{W}'_{\mu\nu} = \mathfrak{W}'_{\mu,\nu-1} + c_{\mu,\nu-1},$$

(wobei im Falle $\nu = 1$ sowohl $\mathfrak{W}_{\mu,\nu-1}$ wie $\mathfrak{W}'_{\mu,\nu-1}$ das leere System bezeichnet). Lassen wir λ alle Zahlen, die $\geqq \mu$ und $< \varrho$ sind, durchlaufen, so ist wegen der Minimumseigenschaft von ϱ $\mathfrak{W}'_{\mu\nu}$ von jedem System $\mathfrak{W}'_{\lambda\nu}$ algebraisch abhängig, und es darf daher keins dieser Systeme von $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$ algebraisch abhängen. Nun gehören aber bis auf $c_{\lambda,\nu-1}$ alle Elemente aus $\mathfrak{W}'_{\lambda\nu}$ zu $\mathfrak{W}'_{\lambda,\nu-1}$, hängen also von $\mathfrak{W}'_{\varrho,\nu-1}$ und somit von $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$ algebraisch ab. Somit darf $c_{\lambda,\nu-1}$ von $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$ nicht algebraisch abhängen. Es müssen also die Elemente $c_{\lambda,\nu-1}$ von dem in $\mathfrak{W}'_{\varrho\nu}$ enthaltenen Element $c_{\varrho,\nu-1}$ verschieden sein. Daraus folgt, daß ϱ keine Limeszahl und

$$(1.) \qquad c_{\varrho-1,\nu-1} = u_{\nu-1}, \quad c_{\varrho,\nu-1} = v_{\varrho-1}, \quad \mathfrak{W}_\varrho = \vartheta_{\varrho-1}(\mathfrak{W}_{\varrho-1}, \mathfrak{V})$$

ist. Es bezeichne $\mathfrak{T}$ das kleinste Teilsystem von $\mathfrak{W}_{\varrho-1}$, von welchem $v_{\varrho-1}$ algebraisch abhängt. Nach der Erklärung des Zeichens $\vartheta_{\varrho-1}$ geht $\mathfrak{W}_\varrho$ aus $\mathfrak{W}_{\varrho-1}$ dadurch hervor, daß das letzte der nicht zu $\mathfrak{V}_{\varrho-1}$ gehörigen Elemente von $\mathfrak{T}$ durch $v_{\varrho-1}$ ersetzt wird. Zufolge (1.) muß $c_{\varrho-1,\nu-1} = u_{\nu-1}$ dieses letzte Element sein; das besagt aber, daß jedes Element von $\mathfrak{T}$ entweder zu $\mathfrak{W}_{\varrho-1,\nu}$ oder zu $\mathfrak{V}_{\varrho-1}$ gehört. Bezeichnet daher $\mathfrak{T}'$ das System, in welches $\mathfrak{T}$ durch die Substitution von $v_{\varrho-1}$ für $u_{\nu-1}$ übergeht, so gehört jedes Element von $\mathfrak{T}'$ entweder zu $\mathfrak{W}_{\varrho,\nu}$ oder zu $\mathfrak{V}_{\varrho-1}$; $\mathfrak{T}'$ ist also Teil von $\mathfrak{W}'_{\varrho,\nu}$. Andererseits ist $\mathfrak{T}'$ zu $\mathfrak{T}$ äquivalent, und das in $\mathfrak{T}$ enthaltene

Element $a = u_{r-1} = c_{\varrho-1, r-1}$ hängt also von $\mathfrak{W}'_{\varrho r}$ algebraisch ab. Da dies im Widerspruch mit dem vorangehenden steht, so ist die Behauptung h) für alle Systeme $\mathfrak{W}'_{\mu\nu}$ richtig und somit e) bewiesen.

Was für unsern Zweck von Interesse ist, ist lediglich die Tatsache, daß das System $\mathfrak{V}$ als Teil von $\mathfrak{W}_r$ in der zwischen $\mathfrak{U} = \mathfrak{W}_0$ und $\mathfrak{W}_r$ bestehenden ähnlichen Beziehung auf einen Teil von $\mathfrak{U}$ ein-eindeutig abgebildet wird. Sind die Systeme $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ äquivalent, so ergibt sich in gleicher Weise die Möglichkeit einer ein-eindeutigen Abbildung von $\mathfrak{U}$ auf einen Teil von $\mathfrak{V}$. Daraus folgt aber nach einem bekannten Satz von *Bernstein*, daß auch eine ein-eindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ möglich ist und somit:

3. *Äquivalente irreduzible Systeme haben dieselbe Kardinalzahl.*

Wird eine transzendente Erweiterung $\mathfrak{L}$ eines Körpers $\mathfrak{K}$ durch Einschiebung eines Körpers $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ in eine rein transzendente und eine algebraische zerlegt, so erhält man aus dieser einen Zerlegung alle möglichen, indem man das irreduzible System $\mathfrak{S}$ durch alle möglichen äquivalenten irreduziblen Systeme ersetzt. Die Kardinalzahl von $\mathfrak{S}$ ist daher durch $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ völlig bestimmt; wir nennen sie den *Transzendenzgrad der Erweiterung* oder *Transzendenzgrad von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$*. Algebraischen Erweiterungen schreiben wir den Transzendenzgrad 0 zu.

Es sei $\mathfrak{L}$ ein Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}$ ein in bezug auf $\mathfrak{K}$ irreduzibles System von Elementen aus $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$ ein in bezug auf $\mathfrak{L}$ irreduzibles System von Elementen aus $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{L}$ sei in bezug auf $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{T})$ algebraisch, so daß die Kardinalzahlen s und t von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ die Transzendenzgrade von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ und von $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}$ darstellen. — In bezug auf $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}+\mathfrak{T})$ sind dann alle Elemente von $\mathfrak{L}$ und alle von $\mathfrak{T}$ algebraisch. Durch Adjunktion aller dieser Elemente zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}+\mathfrak{T})$ erhält man aber den Körper $\mathfrak{L}(\mathfrak{T})$, der also in bezug auf $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}+\mathfrak{T})$ algebraisch ist. Da ebenso $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{T})$ algebraisch ist, so stellt $\mathfrak{M}$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}+\mathfrak{T})$ dar. — Wir betrachten ein beliebiges endliches Teilsystem von $\mathfrak{S}+\mathfrak{T}$ und stellen es in der Form $\mathfrak{S}'+\mathfrak{T}'$ dar, wo $\mathfrak{S}'$ Teil von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}'$ Teil von $\mathfrak{T}$ ist. $\mathfrak{S}'$ ist in bezug auf $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{T}'$ in bezug auf $\mathfrak{L}$, also auch in bezug auf $\mathfrak{K}(\mathfrak{S}')$ irreduzibel. Besteht daher $\mathfrak{S}'$ aus den Elementen $x_1, \ldots x_m$, $\mathfrak{T}'$ aus den Elementen $y_1, \ldots y_n$, so ist von den Elementen $x_1, \ldots x_m$, $y_1, \ldots y_n$ jedes

in bezug auf den Körper, der durch Adjunktion der vorangehenden zu $\mathfrak{k}$ entsteht, transzendent, und es hängt daher in bezug auf $\mathfrak{k}$ keins dieser Elemente von dem System der übrigen algebraisch ab. In bezug auf $\mathfrak{k}$ ist also das System $\mathfrak{S}'+\mathfrak{T}'$ irreduzibel, und da es ein beliebiges endliches Teilsystem von $\mathfrak{S}+\mathfrak{T}$ darstellt, so ist auch $\mathfrak{S}+\mathfrak{T}$ in bezug auf $\mathfrak{k}$ irreduzibel (§ 22, 4.). Die Kardinalzahl von $\mathfrak{S}+\mathfrak{T}$ wird durch $s+t$ bezeichnet, so daß also der Satz gilt:

4. *Eine Erweiterung, die sich aus zwei sukzessiven Erweiterungen von den Transzendenzgraden s und t zusammensetzt, hat den Transzendenzgrad* $s+t$.

Man sieht sofort, daß dies auch gilt, wenn s oder t gleich 0 ist.

Unter dem *absoluten Transzendenzgrad* eines Körpers $\mathfrak{k}$ verstehen wir seinen Transzendenzgrad in bezug auf den Primkörper und fassen zu einer Klasse $K_{c,t}$ alle diejenigen Körper (oder Körpertypen) zusammen, welche dieselbe Charakteristik c und denselben absoluten Transzendenzgrad t haben. c kann 0 oder eine beliebige Primzahl, t 0 oder eine natürliche Zahl oder eine beliebige transfinite Kardinalzahl sein. In jeder Klasse $K_{c,t}$ haben wir zwei bemerkenswerte Typen. Nimmt man nämlich mit einem Primkörper $\mathfrak{P}_c$ eine rein transzendente Erweiterung vom Transzendenzgrad t vor, so gelangt man zu einem wohlbestimmten Typus (§ 22, 5.), welcher der Klasse $K_{c,t}$ angehört und mit $\mathfrak{R}_{c,t}$ bezeichnet werden möge. Zu diesem gehört ferner nach § 21, 9. ein bestimmter algebraisch abgeschlossener Typus — er heiße $\mathfrak{A}_{c,t}$ —, welcher aus $\mathfrak{R}_{c,t}$ durch algebraische Erweiterung hervorgeht, daher ebenfalls zur Klasse $K_{c,t}$ gehört.

5. *Wird ein Körper* $\mathfrak{R}'_{c,t}$ *vom Typus* $\mathfrak{R}_{c,t}$ *algebraisch zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper* $\mathfrak{A}'_{c,t}$ *erweitert, so gehören alle Körper zwischen* $\mathfrak{R}'_{c,t}$ *und* $\mathfrak{A}'_{c,t}$ *der Klasse* $K_{c,t}$ *an. Es wird aber auch jeder Typus der Klasse* $K_{c,t}$ *wenigstens durch einen Körper zwischen* $\mathfrak{R}'_{c,t}$ *und* $\mathfrak{A}'_{c,t}$ *vertreten.*

Daß alle Körper zwischen $\mathfrak{R}'_{c,t}$ und $\mathfrak{A}'_{c,t}$ der Klasse $K_{c,t}$ angehören, folgt daraus, daß sie in bezug auf $\mathfrak{R}'_{c,t}$ algebraisch sind und $\mathfrak{R}'_{c,t}$ dieser Klasse angehört. Sodann ergibt sich aus unseren Voraussetzungen, daß $\mathfrak{A}'_{c,t}$ vom Typus $\mathfrak{A}_{c,t}$ ist. Es sei jetzt $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Körper der Klasse $K_{c,t}$, $\overline{\mathfrak{P}}_c$ der in $\mathfrak{k}$ enthaltene Primkörper. Aus $\mathfrak{k}$ können wir ein in bezug auf $\overline{\mathfrak{P}}_c$ irreduzibles System $\mathfrak{S}$ so herausgreifen, daß $\mathfrak{k}$ in bezug auf $\overline{\mathfrak{R}}_{c,t}=\overline{\mathfrak{P}}_c(\mathfrak{S})$ algebraisch ist. Erweitern wir $\mathfrak{k}$ algebraisch zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\overline{\mathfrak{A}}_{c,t}$, so ist dieser auch in bezug auf $\overline{\mathfrak{R}}_{c,t}$ algebraisch.

Aus der Zugehörigkeit von $\mathfrak{k}$ zu $K_{c,t}$ folgt, daß $\mathfrak{S}$ die Kardinalzahl t hat, $\overline{\mathfrak{R}}_{c,t}$ vom Typus $\mathfrak{R}_{c,t}$, $\overline{\mathfrak{A}}_{c,t}$ vom Typus $\mathfrak{A}_{c,t}$ ist. Ferner ergibt sich (vgl. d. Bew. von § 21, 9.), daß $\overline{\mathfrak{A}}_{c,t}$ auf $\mathfrak{A}'_{c,t}$ so isomorph abgebildet werden kann, daß $\overline{\mathfrak{R}}_{c,t}$ in $\mathfrak{R}'_{c,t}$ übergeht. Dabei wird $\mathfrak{k}$ auf einen Körper zwischen $\mathfrak{R}'_{c,t}$ und $\mathfrak{A}'_{c,t}$ isomorph bezogen; der Typus von $\mathfrak{k}$ ist also unter diesen Körpern vertreten. — Ist $\mathfrak{k}$ selbst algebraisch abgeschlossen, so wird $\mathfrak{k} = \overline{\mathfrak{A}}_{c,t}$ vom Typus $\mathfrak{A}_{c,t}$. Mithin:

6. *Der Typus $\mathfrak{A}_{c,t}$ ist der einzige algebraisch abgeschlossene der Klasse $K_{c,t}$.*

§ 24.

Zusätzliche Bemerkungen verschiedenen Inhalts.

Die Kardinalzahl (Mächtigkeit, Zahl der Elemente) *eines Körpers.* — Aus dem Wohlordnungssatz ergibt sich leicht, daß auch die Kardinalzahlen eine wohlgeordnete Folge bilden, daß die Summe und das Produkt zweier Kardinalzahlen, von denen wenigstens eine transfinit ist, der größeren gleich ist, daß das System aller endlichen Teilmengen einer unendlichen Menge M dieselbe Mächtigkeit wie M hat. Hieraus schließt man weiter, daß die Zahl der ganzen Funktionen einer Unbestimmten x in einem unendlichen Körper nicht größer als die Zahl der Elemente des Körpers ist und daß dasselbe für die Nullstellen dieser Funktionen gilt. Durch algebraische Erweiterung eines unendlichen Körpers wird also die Mächtigkeit nicht erhöht. Eine weitere einfache Folgerung aus den angeführten Sätzen ist die, daß im Falle $t \geqq \aleph_0$ (wo $\aleph_0$ die kleinste transfinite Kardinalzahl, die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen, bezeichnet) der Körper $\mathfrak{R}_{c,t}$ und daher jeder Körper der Klasse $K_{c,t}$ die Kardinalzahl t hat, während im Falle eines endlichen t ein Körper der Klasse $K_{c,t}$, falls er nicht endlich ist (was nur für $c = p$, $t = 0$ der Fall sein kann), $\aleph_0$ Elemente besitzt. — Bei einem Körper, dessen Elemente nicht abzählbar sind, stimmt also die Kardinalzahl mit dem absoluten Transzendenzgrade überein. Da das Kontinuum nicht abzählbar ist, so schließt man (§ 23, 6.), daß alle algebraisch abgeschlossenen Körper von der Mächtigkeit des Kontinuums und der Charakteristik 0 einander isomorph sind. Zu diesen Körpern gehören: der Körper der komplexen Zahlen, der Körper aller algebraischen Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher u. a.

Der Lürothsche Satz. — Dem Satz II des § 14 tritt der folgende zur Seite:

Ist $\Re(x)$ eine einfache transzendente Erweiterung von $\Re$, so ist auch jeder Körper zwischen $\Re$ und $\Re(x)$ in bezug auf $\Re$ einfach.

Wir können diesen Satz auch so formulieren: *Ist Ω eine rein transzendente Erweiterung von $\Re$, der Transzendenzgrad 1, so stellt auch jeder Körper zwischen $\Re$ und Ω eine rein transzendente Erweiterung von $\Re$ dar.* — Die naheliegende Frage, ob derselbe Satz für jede rein transzendente Erweiterung gilt, hat eine Erledigung noch nicht gefunden.

Um zu einem Beweise des *Lürothschen* Satzes zu gelangen, führen wir neben x eine neue Unbestimmte t ein und betrachten die ganzen Funktionen von t mit Koeffizienten aus $\Re(x)$. Zu jeder solchen Funktion $g(t)$ gehört eine aus ihr durch Multiplikation mit einem Faktor aus $\Re(x)$ hervorgehende, *in bezug auf x primitive* Funktion

$$\overline{g}(t) = \varphi_0(x)\, t^n + \varphi_1(x)\, t^{n-1} + \cdots + \varphi_n(x),$$

welche sich dadurch auszeichnet, daß ihre Koeffizienten ganze Funktionen von x sind, die nicht alle einen gemeinsamen Teiler haben. Diese Funktion ist bis auf einen Faktor aus $\Re$ bestimmt; will man haben, daß sie vollständig bestimmt ist, so kann man noch verfügen, daß in $\varphi_0(x)$ der Koeffizient der höchsten Potenz ε sein soll. — Man zeigt in bekannter Weise, daß das Produkt zweier primitiver Funktionen wieder primitiv ist, und daraus folgt sofort, daß man aus einer Gleichung von der Form $f(t) = g(t) \cdot h(t)$, wo $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ ganze Funktionen von t mit Koeffizienten aus $\Re(x)$ sind, wieder zu einer richtigen Gleichung gelangt, wenn man diese Funktionen durch die zugehörigen primitiven ersetzt.

Es sei $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$ eine rationale Funktion von t mit Koeffizienten aus $\Re$ in reduzierter Form, m ihr Grad (>0), y ein in bezug auf $\Re(t)$ transzendentes Element. Dann ist die Funktion

$$\varphi(t) - y \cdot \psi(t)$$

vom Grade m in t, sie ist in y primitiv und, wie sogleich gezeigt werden soll, im Körper $\Re(y)$ irreduzibel. Hätte man nämlich eine Zerlegung

$$\varphi(t) - y \cdot \psi(t) = g(t) \cdot h(t),$$

so würde sich beim Übergange zu den in y primitiven Funktionen die linke Seite nicht ändern; wir können also gleich $g(t)$ und $h(t)$ als primitiv voraussetzen. Es müßte dann eine dieser Funktionen, etwa $g(t)$, von y frei, die andere in y vom ersten Grade sein. Dann erkennt man aber, indem man nach Potenzen von y ordnet, daß $g(t)$ in $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ aufgehen müßte, während doch $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ als teilerfremd vorausgesetzt wurden. — Setzen wir $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, so wird $\Re(y)$ ein Körper zwischen $\Re$ und $\Re(x)$ und x Nullstelle der Funktion $\varphi(t)-y\cdot\psi(t)$, welche vom Grade m und in $\Re(y)$ irreduzibel ist; mithin ist $[\Re(x):\Re(y)]=m$, d. h. der Grad von $\Re(x)$ in bezug auf $\Re(y)$ ist gleich dem Grade von y als rationale Funktion von x. — Wir zeigen jetzt, daß die Funktion

$$\psi(x)\cdot(\varphi(t)-y\cdot\psi(t))=\varphi(t)\psi(x)-\psi(t)\varphi(x)$$

als ganze Funktion von t in x primitiv ist. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots,\quad \psi(x)=b_0+b_1x+\cdots,$$

so daß

$$\varphi(t)\psi(x)-\psi(t)\varphi(x)=(a_0\psi(x)-b_0\varphi(x))+(a_1\psi(x)-b_1\varphi(x))t+\cdots$$

wird. Hätten nun alle Koeffizienten $\gamma_i=a_i\psi(x)-b_i\varphi(x)$ einen gemeinsamen Faktor $\chi(x)$, so würde dieser auch in allen Ausdrücken

$$\gamma_ib_k-\gamma_kb_i=(a_ib_k-a_kb_i)\psi(x),\quad \gamma_ia_k-\gamma_ka_i=(a_ib_k-a_kb_i)\varphi(x),$$

und somit, weil wir (da $m>0$) i und k so wählen können, daß $a_ib_k-a_kb_i\neq0$ wird, auch in $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ aufgehen, was der Annahme, daß $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ teilerfremd sind, widerstreitet. Wenn daher $\varphi(t)\psi(x)-\psi(t)\varphi(x)$ im Integritätsbereich $\Re[t,x]$ in zwei Faktoren zerfällt, so kann keiner von ihnen Funktion von x allein sein. Genau so ist zu zeigen, daß keiner der beiden Faktoren Funktion von t allein sein kann.

Es sei jetzt $\mathfrak{M}$ ein beliebiger, von $\Re$ verschiedener Körper zwischen $\Re$ und $\Re(x)$. Dann ist $\Re(x)$ in bezug auf $\mathfrak{M}$ endlich; denn wenn y ein nicht in $\Re$ enthaltenes Element von $\mathfrak{M}$ ist, so ist, wie wir sahen, $\Re(x)$ in bezug auf $\Re(y)$ endlich, und $\mathfrak{M}$ liegt zwischen $\Re(y)$ und $\Re(x)$. Es sei

$$(1.)\qquad [\Re(x):\mathfrak{M}]=n.$$

Dann ist x Nullstelle einer irreduziblen Funktion n-ten Grades aus $\mathfrak{M}$

$$g(t) = t^n + u_1 t^{n-1} + \cdots + u_n,$$

deren Koeffizienten, da x in bezug auf $\mathfrak{k}$ transzendent ist, nicht alle in $\mathfrak{k}$ vorkommen können. Es sei in reduzierter Form $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ einer der Koeffizienten von $g(t)$, die nicht in $\mathfrak{k}$ vorkommen, m sein Grad in x. Dann liegt $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{k}(y)$ und $\mathfrak{k}(x)$, und wir erhalten $[\mathfrak{k}(x):\mathfrak{k}(y)] = m$, also wegen (1.)

$$(2.) \qquad [\mathfrak{M}:\mathfrak{k}(y)] = \frac{m}{n}, \quad m \geqq n.$$

Zu $g(t)$ gehört eine in x primitive Funktion

$$\bar{g}(t) = \varphi_0(x) t^n + \varphi_1(x) t^{n-1} + \cdots + \varphi_n(x),$$

wo $\frac{\varphi_k(x)}{\varphi_0(x)} = u_k$ $(k = 1, \ldots n)$ ist. Da unter den Funktionen u_k auch y vorkommt, so ist $\bar{g}(t)$ in x wenigstens vom Grade m. — Nun ist x Nullstelle der zum Körper $\mathfrak{M}$ gehörigen Funktion $\varphi(t) - y\psi(t)$; diese muß also durch die in $\mathfrak{M}$ irreduzible Funktion $g(t)$ teilbar sein. Wir erhalten also

$$\varphi(t) - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \psi(t) = g(t) \cdot h(t),$$

und wenn wir zu den zugehörigen, in x primitiven Funktionen übergehen

$$(3.) \qquad \varphi(t)\psi(x) - \psi(t)\varphi(x) = \bar{g}(t)\bar{h}(t).$$

Die linke Seite von (3.) ist in x vom Grade m, $\bar{g}(t)$ ist, wie wir sahen, in x *wenigstens* vom Grade m; aus (3.) folgt also jetzt, daß $\bar{g}(t)$ in x *genau* vom Grade m und $\bar{h}(t)$ von x frei sein muß. Da ferner gezeigt wurde, daß $\varphi(t)\psi(x) - \psi(t)\varphi(x)$ keinen Faktor haben kann, der eine Funktion von t allein ist, so kann $\bar{h}(t)$ auch t nicht enthalten, und wir erhalten, indem wir auf beiden Seiten von (3.) die Grade in t vergleichen,

$$m = n$$

und daraus nach (2.)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{k}(y).$$

Damit ist der *Lürothsche* Satz bewiesen.

Dieser „rationale“ Beweis des Satzes hat den Vorzug, daß er ohne jede Einschränkung für alle Körper $\mathfrak{k}$ gilt, während in der gewöhnlich gegebenen Beweisform die Voraussetzungen enthalten sind, daß der Körper $\mathfrak{k}$

vollkommen ist und unendlich viele Elemente besitzt. Diese Beweisform erfordert im Falle eines unvollkommenen Körpers umständliche Modifikationen, bei endlichen Körpern versagt sie ganz.

Die algebraisch abgeschlossenen Erweiterungen. — Mit dem Nachweis der Existenz einer algebraisch abgeschlossenen Erweiterung, die zu einem gegebenen Körper $\mathfrak{k}$ gehört, ist noch keine Methode gewonnen, um eine solche Erweiterung wirklich herzustellen. Schon für die Anordnung der Elemente eines Körpers $\mathfrak{k}$ zu einem wohlgeordneten System, auf welche in jenem Beweise Bezug genommen ist, fehlt naturgemäß jede allgemeine Methode. Es ist jedoch keineswegs die Herstellung einer algebraisch abgeschlossenen Erweiterung an eine bereits ausgeführte Wohlordnung von $\mathfrak{k}$ gebunden. Dafür zwei Beispiele. In beiden ist der Grundkörper von der Mächtigkeit des Kontinuums, von der, wie bekannt, noch nicht einmal festgestellt werden konnte, ob sie gleich $\aleph_1$, der zweiten transfiniten Kardinalzahl ist. Von dieser Mächtigkeit sind u. a. der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen, der Körper der rationalen Funktionen einer Veränderlichen z mit komplexen Koeffizienten, sodann auch der von *K. Hensel* eingeführte Körper $K(p)$ der sog. p-adischen Zahlen*).

Im Falle $\mathfrak{k} = K(p)$ gelangt man auf Grund verschiedener Untersuchungen, die *Hensel* in dem zitierten Werke und in einer unlängst in diesem Journal erschienenen Abhandlung**) durchgeführt hat, zum Ziel. Wesentlich ist hier der Nachweis, daß jede ganze Funktion $f(x)$ aus $K(p)$ in einem Körper vollständig zerfällt, der aus $K(p)$ durch Adjunktion einer Nullstelle einer Funktion $g(x)$ hervorgeht, die in $K(p)$ irreduzibel ist und deren Koeffizienten gewöhnliche ganze Zahlen sind. Damit ist nachgewiesen, daß das System aller ganzen Funktionen aus $K(p)$ dem System S der ganzen ganzzahligen Funktionen äquivalent ist. Während nun das erstgenannte System von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, ist das System S abzählbar und kann also in eine einfache Reihe geordnet werden. Hat man sich für irgendeine Anordnung entschieden und bezeichnet man die so geordneten Funktionen mit $f_n(x)$, wo n die natürlichen Zahlen durchläuft, so kann man nach den *Hensel*schen Methoden die erste Funktion aus S, welche dem System

*) Theorie der algebraischen Zahlen I (Leipzig und Berlin 1908).
**) Bd. 136 (1909), S. 183.

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$$

äquivalent, in $K(p)$ irreduzibel und überdies normal ist, durch ein endliches Verfahren berechnen. Wird dieselbe mit $\varphi_n(x)$ bezeichnet, so hat man ein System von Normalfunktionen

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots,$$

bei welchem jeder Abschnitt der folgenden Funktion untergeordnet ist. Führt man ein System von Symbolen j_n ein, mit der Verfügung, daß j_n Nullstelle von $\varphi_n(x)$ sein soll, so erhält man ein System von Erweiterungen des Körpers $\mathfrak{K} = K(p)$:

$$(4.) \qquad \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}(j_1), \ldots, \mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}(j_n), \ldots.$$

Bezeichnet r_n den Grad von $\varphi_n(x)$, so ist jedes Element von $\mathfrak{K}_n$ in der Form $g(j_n)$ darstellbar, wo $g(x)$ eine ganze Funktion aus $K(p)$ und ihr Grad kleiner als r_n ist. r_{n-1} der Elemente von $\mathfrak{K}_n$ sind Nullstellen von $\varphi_{n-1}(x)$. Will man nun haben, daß jeder Körper der Folge (4.) Teil des folgenden sein soll, so daß, wie in dem in § 16 behandelten Falle, diese Körper in ihrer Gesamtheit den gesuchten algebraisch abgeschlossenen Körper konstituieren, so muß man noch eine Verfügung treffen, nach welcher zu entscheiden ist, welche der in $\mathfrak{K}_n$ enthaltenen Nullstellen von $\varphi_{n-1}(x)$ gleich j_{n-1} sein soll. Nun ist es zwar bisher nicht gelungen, $K(p)$ oder irgendein System von der Mächtigkeit des Kontinuums als wohlgeordnetes System darzustellen, dagegen kann $K(p)$ sehr leicht als geordnetes System dargestellt werden*). Auf Grund einer solchen Ordnung von $K(p)$ erhält man eine Anordnung der ganzen Funktionen aus $K(p)$, indem man vorschreibt, daß die Funktion $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots$ der Funktion $h(x) = b_0 + b_1 x + \cdots$ vorangehen soll, wenn im Falle $a_k = b_k$ $(k < n)$, $a_n \neq b_n$ das Element a_n früher als b_n ist. Sodann kann man festsetzen, daß wenn $g(x)$ die erste Funktion aus $K(p)$ ist, welche für $x = j_n$ in eine Nullstelle von $\varphi_{n-1}'(x)$ übergeht, $g(j_n) = j_{n-1}$ sein soll. — Damit ist die Aufgabe gelöst.

Wir betrachten an zweiter Stelle den Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}(z)$, der aus dem Körper $\mathfrak{C}$ der komplexen Zahlen durch Adjunktion eines transzendenten Elementes z hervorgeht (Körper der rationalen Funktionen einer Veränderlichen). Hier ist das System aller ganzen Funktionen einer Unbestimmten

*) *Hensel*, Neue Grundlagen der Arithmetik. Dieses Journal Bd. 127. S. 52, 53.

x in $\mathfrak{K}$ nicht mehr einem abzählbaren System äquivalent, doch gelingt hier die Herstellung einer algebraisch abgeschlossenen Erweiterung von $\mathfrak{K}$ (ohne Auswahlprinzip) leicht mit den Hilfsmitteln der Analysis. Es sei nämlich $\mathfrak{A}$ das System aller für hinlänglich kleine Werte von r konvergenter Reihen von der Form

$$\sum_{k=q}^{+\infty} a_k r^{\frac{k}{n}} \left(\cos\frac{k}{n}\varphi + i \sin\frac{k}{n}\varphi\right),$$

wo r eine positive, φ eine reelle Veränderliche, n irgendeine natürliche, q irgendeine ganze Zahl bezeichnet, $r^{\frac{k}{n}}$ stets positiv zu nehmen ist und die Koeffizienten a_k, deren Index k alle ganzen Zahlen von q an aufwärts durchläuft, beliebige komplexe Zahlen sind. Jede solche Reihe stellt in ihrem Konvergenzbereich eine eindeutige Funktion von r und φ dar. Zwei Reihen gelten als dasselbe Element von $\mathfrak{A}$, wenn sie für alle Wertepaare r, φ ihres Konvergenzbereiches nach demselben Werte konvergieren. Zu zwei Elementen α, β aus $\mathfrak{A}$ gehören, wie man in bekannter Weise zeigt, zwei weitere γ, δ derart, daß innerhalb des gemeinsamen Konvergenzgebietes zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als Funktionen von r und φ die Beziehungen

$$(5.) \qquad \alpha + \beta = \gamma, \quad \alpha \cdot \beta = \delta$$

bestehen. Lassen wir die Gleichungen (5.) als Kompositionsgleichungen für $\mathfrak{A}$ gelten, so wird $\mathfrak{A}$ ein System mit doppelter Komposition, welches sich leicht als ein algebraisch abgeschlossener Körper erweist. Jedem Element $R(z)$ von $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}(z)$ entspricht in $\mathfrak{A}$ ein Element α derart, daß für hinlänglich kleine Werte von r $R(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))$ gleich α wird. Der Körper $\mathfrak{K}$ wird so auf einen Teilkörper $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{A}$ isomorph abgebildet, und da $\mathfrak{A}$ algebraisch abgeschlossen ist, so bilden die in bezug auf $\mathfrak{K}'$ algebraischen Elemente von $\mathfrak{A}$ einen Körper $\mathfrak{A}'$, der algebraisch abgeschlossen und in bezug auf $\mathfrak{K}'$ algebraisch ist.

Isomorphe Abbildung eines Körpers auf einen Teilkörper. — Ist $\mathfrak{L}$ eine algebraische Erweiterung des Körpers $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}'$ ein Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ und von $\mathfrak{L}$ verschieden, α ein nicht in $\mathfrak{L}'$ enthaltenes Element von $\mathfrak{L}$, $\varphi(x)$ die irreduzible Funktion aus $\mathfrak{K}$ mit der Nullstelle α, so ist die Anzahl der irreduziblen Faktoren von $\varphi(x)$ im Körper $\mathfrak{L}$ größer als im Körper $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ sind daher nicht äquivalente Erweiterungen. Ist $\mathfrak{K}$ Primkörper, so können $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ nicht isomorph sein, weil bei einer iso-

morphen Beziehung zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ jedes Element des Primkörpers unverändert bliebe, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ also äquivalente Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ darstellten. Damit ist bewiesen:

1. *Ein absolut algebraischer Körper ist keinem echten Teil von sich isomorph.*

Da jeder Teilkörper eines absolut algebraischen Körpers wieder absolut algebraisch ist, so gilt

2. *Zwei Teilkörper eines absolut algebraischen Körpers, von denen der eine echter Teil des andern ist, können nicht isomorph sein.*

Die durch 2. bezeichnete Eigenschaft ist für die absolut algebraischen Körper charakteristisch; denn wenn der Körper $\mathfrak{L}$ nicht absolut algebraisch und x ein in bezug auf seinen Primkörper $\mathfrak{P}$ transzendentes Element ist, so ist $\mathfrak{P}(x^2)$ echter Teil von $\mathfrak{P}(x)$, aber beide Körper sind isomorph. Dagegen drückt 1. keine charakteristische Eigenschaft absolut algebraischer Körper aus; denn man sieht sehr leicht, daß z. B. ein Körper vom Typus $\mathfrak{A}_{c,t}$, wo t endlich ist, keinem echten Teil von sich isomorph sein kann.

Unter den Körpern, welche einem echten Teil von sich isomorph sind, haben wir zwei Arten zu unterscheiden. Ein Repräsentant der ersten Art ist der Körper $\mathfrak{R}_{c,1}$. Derselbe besitzt unendlich viele Teilkörper, die aber bis auf den Primkörper nach dem *Lüroth*schen Satze alle vom Typus $\mathfrak{R}_{c,1}$ sind. Ein zwischen einem Körper $\mathfrak{R}_{c,1}$ und einem isomorphen Teilkörper gelegener Körper ist also stets wieder $\mathfrak{R}_{c,1}$ isomorph. Von anderer Art ist der Körper $\mathfrak{A}_{c,t}$ bei unendlichem t. Durch Adjunktion eines transzendenten Elementes x geht aus $\mathfrak{A}_{c,t}$ ein Körper $\mathfrak{A}_{c,t}(x)$ hervor, der wieder den Transzendenzgrad t hat, aber offenbar nicht algebraisch abgeschlossen, also nicht vom Typus $\mathfrak{A}_{c,t}$ ist. Erweitern wir aber $\mathfrak{A}_{c,t}(x)$ algebraisch zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so ist dieser wieder vom Typus $\mathfrak{A}_{c,t}$. Hier liegt also zwischen zwei isomorphen Körpern ein nicht isomorpher. Jedesmal, wenn ein solcher Fall vorliegt, haben wir zwei Körper $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ verschiedener Typen, von denen jeder einem Teil des andern isomorph ist. Durch die Teilkörper von $\mathfrak{K}_1$ werden also dieselben Typen repräsentiert wie durch die Teilkörper von $\mathfrak{K}_2$.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 167

I. Grundlagen.

§ 1. Systeme mit doppelter Komposition. Isomorphismus. Körper . 172
§ 2. Teilkörper, Erweiterung, Adjunktion 174
§ 3. Integritätsbereiche 177
§ 4. Primkörper. Charakteristik 179
§ 5. Äquivalente Erweiterungen. Einfache Erweiterungen. Transzendente und algebraische Elemente. Adjunktion eines transzendenten Elementes. Ganze und rationale Funktionen 182
§ 6. Adjunktion eines algebraischen Elementes 192

II. Algebraische Erweiterungen.

§ 7. Grundlagen der algebraischen Erweiterungen 198
§ 8. Zerlegung einer beliebigen ganzen Funktion in Linearfaktoren. Normalkörper und Normalfunktionen 204
§ 9. Differenzierung 209
§ 10. Die Vielfachheit der Nullstellen einer ganzen Funktion 212
§ 11. Vollkommene und unvollkommene Körper 218
§ 12. Unvollkommene Körper: Kleinster enthaltender und größter enthaltener vollkommener Körper. — Wurzelkörper 224
§ 13. Unvollkommene Körper: Algebraische Erweiterungen erster Art . 231
§ 14. Unvollkommene Körper: Beliebige algebraische Erweiterungen, Satz der primitiven Elemente und Satz der Zwischenkörper . . 237
§ 15. Endliche Körper 245

III. Unendliche algebraische Erweiterungen.

§ 16. Die absolut algebraischen Körper von Primzahlcharakteristik . . 249
§ 17. Algebraisch abgeschlossene Körper 260
§ 18. Beziehungen zwischen Systemen ganzer Funktionen und Erweiterungskörpern. 262
§ 19. Hilfsbetrachtungen aus der Mengenlehre 267
§ 20. Die nächsten Anwendungen 271
§ 21. Der Fundamentalsatz der algebraischen Erweiterungen 279

IV. Transzendente Erweiterungen.

§ 22. Transzendente Erweiterungen. Algebraische Abhängigkeit zwischen Elementen eines Erweiterungskörpers 288
§ 23. Der Transzendenzgrad und die Einteilung der Körper in Klassen 292
§ 24. Zusätzliche Bemerkungen verschiedenen Inhalts 301

Über den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschließt.

Von Herrn *Heinrich W. E. Jung* in Hamburg.

In einer Arbeit im 123. Bande dieses Journals mit dem Titel: „Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschließt“ habe ich zwei einfache geometrische Aufgaben betrachtet. Die Aufgaben sind dort gleich für den Fall des n-dimensionalen Raumes behandelt und mit analytischen Hilfsmitteln. Es tritt daher dort nicht recht hervor, wie einfach die Lösung der beiden behandelten Probleme in Wirklichkeit ist. Ich will daher im folgenden die beiden Aufgaben für den Fall der Ebene rein geometrisch lösen. Die Behandlung ist im Grunde genommen mit der in der früheren Arbeit gegebenen identisch.

I.

Die erste Aufgabe, um die es sich handelt, lautet:

Es seien n Punkte in einer Ebene gegeben; den kleinsten Kreis zu zeichnen, der die gegebenen Punkte einschließt. Dabei soll die Peripherie des Kreises mit zum Inneren gerechnet werden.

Ist nur *ein* Punkt gegeben, so hat die Aufgabe keine Lösung.

Sind *zwei* Punkte gegeben, so ist der Kreis über ihrer Verbindungsstrecke als Durchmesser der gesuchte Kreis.

Sind *drei* Punkte gegeben und ist das von den drei Punkten gebildete Dreieck stumpfwinklig, so ist der Kreis über der größten Seite dieses Dreiecks als Durchmesser der gesuchte Kreis. Ist das Dreieck spitzwinklig, so ist der Umkreis der gesuchte Kreis. Ist das Dreieck

rechtwinklig, so kann man es nach Belieben zu den stumpfwinkligen oder spitzwinkligen rechnen.

Sind *mehr als drei* Punkte gegeben, so sieht man zunächst, daß auf der Peripherie des gesuchten Kreises entweder zwei der gegebenen Punkte liegen, die Endpunkte eines Durchmessers sind, oder wenigstens drei Punkte, die ein spitzwinkliges Dreieck bilden. Der Beweis hierzu ist folgender.

1. Läge keiner der gegebenen Punkte auf der Peripherie des gesuchten Kreises, so könnte man einen konzentrischen *kleineren* Kreis zeichnen, der alle Punkte enthält.

2. Es mögen einige Punkte auf der Peripherie des gesuchten Kreises liegen. Lägen diese nun so, daß man einen Durchmesser so zeichnen kann, daß alle Punkte, die auf der Peripherie liegen, auf *einer* Seite des Durchmessers liegen, so könnte man zunächst den Kreis senkrecht zu diesem Durchmesser nach derjenigen Seite, auf der die betreffenden Punkte liegen, so verschieben, daß kein Punkt mehr auf der Peripherie des Kreises liegt, sondern alle innerhalb der Peripherie. Dann könnte man wieder einen *kleineren* konzentrischen Kreis zeichnen, der alle Punkte enthält. Daraus folgt, daß es einen solchen Durchmesser nicht geben darf. Dann aber müssen unter den gegebenen entweder zwei Punkte vorhanden sein, die an den Enden eines Durchmessers liegen, oder es müssen mindestens drei Punkte vorhanden sein, die auf der Peripherie des Kreises liegen und ein *spitzwinkliges* Dreieck bilden. Hiernach ergibt sich als Lösung unserer Aufgabe folgendes:

Man löse die Aufgabe immer für je drei Punkte. Der größte von allen so erhaltenen Kreisen ist der gesuchte Kreis. Denn nach dem bewiesenen muß einer dieser Kreise der gesuchte sein, und er kann offenbar nicht kleiner sein als der größte unter ihnen.

Zum Schluß sei noch gezeigt, daß die Aufgabe nur eine Lösung haben kann. Nehmen wir an, es ergäben sich als Lösung zwei nicht zusammenfallende Kreise. Dann müssen alle gegebenen Punkte in dem beiden Kreisen gemeinschaftlichen Teile der Ebene liegen; dann aber liegen die Punkte auch innerhalb des Kreises, den man über der gemeinschaftlichen Sehne der beiden gefundenen Kreise zeichnen kann, und dieser Kreis würde kleiner sein als die beiden als Lösung angenommenen Kreise.

II.

Die zweite Aufgabe ist folgende: Sind irgend n Punkte in einer Ebene gegeben, so wollen wir die größte Entfernung irgend zweier Punkte des Punktsystems seinen *Durchmesser* nennen. *Es soll der kleinste Kreis bestimmt werden, in den man jedes Punktsystem vom Durchmesser* 1 *hineinlegen kann.*

Den Radius des gesuchten Kreises bezeichnen wir mit ϱ. Es sei irgendein Punktsystem vom Durchmesser 1 gegeben. Wir bestimmen den kleinsten Kreis, der dieses Punktsystem einschließt. Es sind nach der vorhergehenden Aufgabe folgende beiden Fälle möglich:

1. Es liegen zwei der gegebenen Punkte an den Endpunkten eines Durchmessers. Dann ist der Durchmesser des Kreises kleiner oder gleich 1 und also der Radius

$$\varrho_0 \leqq \frac{1}{2}.$$

2. Es liegen drei der gegebenen Punkte auf der Peripherie des Kreises und bilden ein spitzwinkliges Dreieck. Es sei a eine Seite des Dreiecks, die nicht kleiner ist als die andern, und α der gegenüberliegende Dreieckswinkel. Da das Dreieck spitzwinklig ist, so ist $\alpha < 90^0$, und da α nicht kleiner sein kann als jeder der beiden andern Dreieckswinkel, so ist $\alpha \geqq 60^0$. Wir haben also

$$a \leqq 1, \quad 60^0 \leqq \alpha < 90^0.$$

Nun ist der Radius des kleinsten Kreises

$$\varrho_0 = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

also

$$\varrho_0 \leqq \frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Da $\frac{1}{2}$ kleiner ist als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, so ist danach der Radius des kleinsten Kreises, der ein Punktsystem vom Durchmesser 1 einschließt, immer kleiner oder gleich $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Es ist also

$$\varrho \leqq \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Es kann aber ϱ nicht kleiner sein als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, weil wir leicht ein Punktsystem vom Durchmesser 1 angeben können, bei dem der kleinste Kreis, der es einschließt, genau den Radius $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ hat. Es ist dies das System, das aus drei Punkten besteht, die ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 1 bilden.

Die Lösung unserer Aufgabe lautet also:

Der kleinste Kreis, in den man jedes Punktsystem vom Durchmesser 1 *hineinlegen kann, hat den Radius* $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Es hat keine Schwierigkeit, den Satz auch auf den Fall auszudehnen, daß unendlich viele Punkte gegeben sind, die natürlich alle im Endlichen liegen müssen und keine Häufungsstelle im Unendlichen haben dürfen.

Über den *Fermat*schen Satz.*)

Von Herrn *G. Frobenius* in Berlin.

Sei p eine ungerade Primzahl, und seien x, y, z drei durch p nicht teilbare Zahlen, die der *Fermat*schen Gleichung

$$x^p + y^p + z^p = 0$$

genügen. Dann ist

$$x + y + z \equiv 0, \tag{1.}$$

nämlich mod. p, wie stets im folgenden zu ergänzen ist, mithin

$$(x+y)^p \equiv -z^p = x^p + y^p \pmod{p^2}.$$

Ich setze nun

$$\varphi_n(t) = \sum_r r^{n-1}(-t)^r, \tag{2.}$$

wo sich r von 0 bis $p-1$ bewegt, also (abweichend von Herrn *Mirimanoff*)

$$\varphi_1(t) = \Sigma(-t)^r = \frac{1+t^p}{1+t}; \tag{3.}$$

dann ist, wenn sich n von 1 bis $p-1$ bewegt,

$$\varphi_{p-1}(t) \equiv \sum_n \frac{1}{n}(-t)^n \equiv -\frac{1}{p}\Sigma\binom{p}{n}t^n$$

und mithin

$$\varphi_{p-1}(t) \equiv \frac{1}{p}(1+t^p-(1+t)^p). \tag{4.}$$

Der obigen Formel nach genügen folglich die sechs Zahlen

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der Kgl. preuß. Akad. d. Wissensch. 1909. S. 1222 (Sitz. v. 2. Dez.).

$$\frac{x}{y}, \frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}, \frac{y}{z}, \frac{z}{y} \pmod{p}$$

der Kongruenz

$$\varphi_{p-1}(t) \equiv 0. \tag{5.}$$

Von diesen Zahlen ist keine 0 und nach (1.) auch keine -1.

Außerdem genügen sie nach *Kummer* noch $\frac{1}{2}(p-3)$ anderen Kongruenzen, die Herr *Mirimanoff* auf die Form

$$B_{2k}\varphi_{p-2k}(t) \equiv 0 \qquad \left(k=1,2,\ldots \tfrac{1}{2}(p-3)\right) \tag{6.}$$

gebracht hat. Hier sind $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=\frac{1}{30}$, ... die *Bernoulli*schen Zahlen.

Aus den Bedingungen (5.) und (6.) hat Herr *Wieferich* in höchst scharfsinniger Weise die Kongruenz

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \tag{7.}$$

abgeleitet in der Arbeit „*zum letzten Fermatschen Theorem*“ (dieses Journal Bd. 136, S. 293), auf die ich wegen der Literaturangaben verweise. Zu diesem Ergebnis, das wegen seiner Brauchbarkeit für die Rechnung besonders beachtenswert ist, kann man sehr einfach auf folgendem Wege gelangen.

Die Doppelsumme

$$L = \sum_{r,s} (-1)^{r-s} (r-s)^{p-2} t^s, \tag{8.}$$

worin sich r und s von 0 bis $p-1$ bewegen, ist gleich

$$L = \sum_{n,r,s} (-1)^n \binom{p-2}{n-1} (-1)^r r^{n-1} (-1)^s s^{p-n-1} t^s,$$

wo $r^{n-1}=1$ zu setzen ist, falls $r=n-1=0$ ist. Folglich ist

$$L = \sum_{n} (-1)^n \binom{p-2}{n-1} \varphi_n(1)\, \varphi_{p-n}(t).$$

Nach (3.) ist $\varphi_1(t) \equiv 1$. Ferner ist, falls $0<k<\frac{1}{2}(p-1)$ ist,

$$\varphi_{2k+1}(1) = \sum (-1)^n n^{2k} \equiv 0,$$

$$\varphi_{2k}(1) = \sum (-1)^n n^{2k-1} \equiv (-1)^k B_{2k} \frac{1}{k} (2^{2k}-1).$$

Die erste Kongruenz ergibt sich, indem man n durch $p-n$ ersetzt, die zweite aus der Kongruenz

$$S_n\left(\frac{1}{2}(p+1)\right) \equiv S_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad \text{wo } S_n(x) \equiv \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{2}x^n + \cdots$$

die *Bernoulli*sche Funktion ist. Nach (5.) und (6.) ist daher

$$L \equiv \varphi_{p-1}(1). \tag{9.}$$

Nun zerlege ich die Summe (8.) in zwei Teilsummen $M+N$, indem ich unterscheide, ob $r-s$ positiv oder negativ ist.

Ist $r-s=n>0$, so ist

$$M = \Sigma(-1)^n n^{p-2}(1+t+\cdots+t^{p-1-n}),$$
$$(1-t)M = \Sigma(-1)^n n^{p-2}(1-t^{p-n}) \equiv \varphi_{p-1}(1) - \Sigma(-1)^{p-n}(p-n)^{p-2}t^{p-n},$$

oder, wenn man $p-n$ durch n ersetzt,

$$(1-t)M \equiv \varphi_{p-1}(1) - \varphi_{p-1}(t) \equiv \varphi_{p-1}(1).$$

Ist aber $r-s=-n<0$, so ist

$$N = -\Sigma(-1)^n n^{p-2}(t^n + t^{n+1} + \cdots + t^{p-1}),$$
$$(1-t)N = -\Sigma(-1)^n n^{p-2}(t^n - t^p) \equiv -\varphi_{p-1}(t) + t^p\varphi_{p-1}(1) \equiv t\,\varphi_{p-1}(1).$$

Demnach ist

$$(1-t)L \equiv (1+t)\,\varphi_{p-1}(1).$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Formel (9.), so erhält man die Kongruenz

$$\varphi_{p-1}(1) \equiv 0,$$

die nach (4.) mit der Relation (7.) gleichbedeutend ist.

GENERAL LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
FEB 21 1910

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 137.

Heft IV.

Ausgegeben den 28. Januar.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1910.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 16.—.

Band 137. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Steinitz, E., Algebraische Theorie der Körper (Schluß.) . . . . . Seite 247
Jung, H. W. E., Über den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschließt — 310
Frobenius, G., Über den *Fermat*schen Satz . . . . . — 314

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

VERLAG VON GEORG REIMER

LÜTZOWSTR. 107-8 **BERLIN W. 35** LÜTZOWSTR. 107-8

G. LEJEUNE DIRICHLETS WERKE.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlichen Akademie der Wissenschaften von L. KRONECKER. Fortgesetzt von L. FUCHS. Zwei Bände mit Dirichlets Bildnis. Band I Mark 21.—; Band II Mark 18.—.

C.G.J. JACOBIS GESAMMELTE WERKE.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlichen Akademie der Wissenschaften.

Band I (1881) Mark 18.—; Band II (1882) Mark 17.—; Band III (1884) Mark 20.—; Band IV (1886) Mark 18.—; Band V (1890) Mark 16.—; Band VI (1891) Mark 14.—; Band VII (1891) Mark 14.—; Supplementband (1884) Mark 10.—.

C.W. BORCHARDTS GESAMMELTE WERKE.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlichen Akademie der Wissenschaften von G. HETTNER. Mit Borchardts Bildnis. Mark 17.—.

J. STEINERS GESAMMELTE WERKE.

Herausgegeben auf Veranlassung der Königlichen Akademie der Wissenschaften von K. WEIERSTRASS. Band I mit 44 Tafeln und Steiners Bildnis Mark 16.—. Band II mit 23 Tafeln Mark 18.—.

J. L. LAGRANGES MATHEMATISCHE WERKE.

Deutsch von A. L. CRELLE. 3 Bände. (Band III vergriffen.) Preis für Band I und II Mark 8.—.

VERLAGSBUCHHANDLUNG VON GEORG REIMER IN BERLIN W. 35

Soeben erschienen:

Biographisches Jahrbuch und Deutscher Nekrolog

Herausgegeben von ANTON BETTELHEIM

Band XII: Die Toten des Jahres 1907

Mit dem Bildnis des Großherzogs Friedrich I. von Baden

Geheftet Mk. 12.— | Halbfranz gebunden Mk. 14.—

VERLAGSBUCHHANDLUNG VON GEORG REIMER IN BERLIN W. 35

Kants Kritik der reinen Vernunft

Herausgegeben von BENNO ERDMANN

5. durchgesehene Auflage . . . Preis broschiert Mark 4.—, in Halbfranz gebunden Mark 5.—

Philosophische Propädeutik

auf naturwissenschaftlicher Grundlage für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht von AUGUST SCHULTE-TIGGES

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage . . . . . Geheftet Mark 3.—, gebunden Mark 3.80

Verlag von Georg Reimer in Berlin W. 35

TAFELN DER FUNKTIONEN COSINUS UND SINUS

Mit den natürl. sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis- u. Hyperbelfunktionen)

Gebunden 4 Mark — Von Dr. Carl Burrau — Gebunden 4 Mark

Verlag von Georg Reimer in Berlin W. 35

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik

Begründet von **CARL OHRTMANN**

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von **Felix Müller, Albert Wangerin, Erich Salkowski** sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

Herausgegeben von **EMIL LAMPE**

Jährlich ein Band von 3 Heften zu verschiedenen Preisen